

**Geschichtliches.**

**Slaught, H. E.:** The lag in mathematics behind literature and art in the early centuries. Amer. Math. Monthly 41, 167—174 (1934).

Betrachtungen über Entwicklung von Sprache, Zahlbezeichnung und andere mathematische Ideen. Eine Reihe von Behauptungen sind nicht korrekt.

*O. Neugebauer* (Kopenhagen).

**Neugebauer, O.:** Über die Rolle der Tabellentexte in der babylonischen Mathematik. Math.-fys. Medd., Danske Vid. Sels. 12, Nr 13, 1—14 (1934).

Verf. vertritt die These, daß die „eigentlich mathematischen“ Texte und die „Tabellentexte“ nicht zwei wesentlich geschiedene Textgattungen sind, wie man bisher annahm, sondern daß die Tabellentexte im Rahmen der babylonischen Mathematik eine weit größere Rolle gespielt haben als die, nur Hilfsmittel zur Ausführung numerischer Rechnungen zu sein. Die Tabellentexte seien vielmehr wesentliches Konstruktionshilfsmittel gewesen. So, wie die moderne Mathematik Lösungen von Aufgaben formelmäßig auf bekannte Funktionen zurückführt, habe die babylonische Mathematik die Aufgaben auf einen Zustand hingeführt, von dem aus sich das Resultat durch Benutzung eines Tabellentextes ergibt. Dem einzelnen Tabellentext komme so gewissermaßen dieselbe Bedeutung zu wie einer individuellen stetigen Funktion und ihrer Umkehrfunktion.

*Bessel-Hagen* (Bonn).

**Vogel, Kurt:** Kubische Gleichungen bei den Babyloniern? S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 1, 87—94 (1934).

Geometrische Umschreibung der vom Ref. publizierten Aufgaben, die auf kubische Gleichungen führen (dies. Zbl. 7, 386). Verf. versucht die Tabellen zu rekonstruieren, die zur Lösung der allgemeineren Gleichungsformen gedient haben könnten.

*O. Neugebauer* (Kopenhagen).

**Hasse, Helmut, und Heinrich Scholz:** Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik. Bull. Soc. Math. Grece 14, Nr 1, 61—97, Nr 2, 65—86 (1933); 15, Nr 1, 40 bis 65 (1934) [Griechisch].

Übersetzung der gleichnamigen, bereits 1928 erschienenen Arbeit der beiden Verff. ins Griechische.

*O. Neugebauer* (Kopenhagen).

**Miller, G. A.:** Vague historical views relating to the negative numbers. Math. Student 2, 1—10 (1934).

**Bortolotti, Ettore:** L'opera geometrica di Gabriele Manfredi. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, VIII. s. 10, 103—114 (1933).

**Stamm, Edward:** Le géométrie de Copernic. Wiadom. mat. 37, 57—100 (1934). [Polnisch].

**Nova Kepleriana.** Wiederaufgefundene Drucke und Handschriften von Johannes Kepler. Hrsg. v. Walther von Dyck. VIII. Die Keplerbriefe auf der Braunschweigischen Landesbibliothek in Wolfenbüttel. II. Tl. Zusammen mit zugehörigen Aktenstücken der Landesbibliothek in Stuttgart. Abh. bayer. Akad. Wiss., N. F. H. 23, 1—90 (1934).

Die hier publizierten Briefe betreffen hauptsächlich Keplers Versuche, ein Planetarium zu bauen, sowie seine Gedanken und Messungen bezüglich einer Fixsternparallaxe. Vgl. auch dies. Zbl. 7, 147.

*O. Neugebauer* (Kopenhagen).

**Rebel, Otto Julius:** Der Briefwechsel zwischen Johann (I.) Bernoulli und dem Marquis de L'Hospital in erläuternder Darstellung. Heidelberg: Diss. 1934. 46 S.

**Schlosser, Edgar Oswin:** Die Rezensionstätigkeit von Leibniz auf mathematischem und physikalischem Gebiet. Heidelberg: Diss. 1934. 57 S.



**Scholtz, Lucie:** Die exakte Grundlegung der Infinitesimalrechnung bei Leibniz.

Marburg: Diss. 1934, 74 S.

Diese Dissertation enthält (S. 41 ff.) die Erstpublikation von Leibniz-Handschriften „De quadratura arithmetica circulis ellipseos et hyperbolae cuius corollarium est trigonometria sine tabulis“. Es ist im übrigen die Absicht dieser Arbeit, „den Beweis dafür zu erbringen, daß Leibniz sich aller Schwierigkeiten, die mit der Einführung des Differentialbegriffs auftraten, ganz klar bewußt war und daß er sich nicht nur immer wieder darum bemüht hat, sondern daß es ihm auch immer besser gelungen ist, diese Schwierigkeiten zu überwinden und dem Aufbau seines Werkes die erforderlichen unumstößlichen Grundlagen vollkommen zu sichern“.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

**Jelitai (Woyciechowsky), József:** Über ein Manuskript von Sipos und die Kochleoiden.

Mat. fiz. Lap. 41, 45—51 u. dtsch. Zusammenfassung 52—54 (1934) [Ungarisch].

**Coolidge, J. L.:** The rise and fall of projective geometry. Amer. Math. Monthly 41, 217—228 (1934).

**Soldaini, Emma:** Cenno storico sulla teoria delle coniche focali. II. Contributo della scuola francese. Period. Mat., IV. s. 14, 158—177 (1934).

**Datta, Bibhutibhusan:** Introduction of Arabic and Persian mathematics into Sanskrit literature. Proc. Benares Math. Soc. 14, 7—21 (1932).

**Somayajulu, D. A.:** A brief sketch of Hindu trigonometry. Math. Student 2, 12—21 (1934).

**Hayashi, Tsuruichi:** On the curved lines and surfaces in the old Japanese mathematics. Tôhoku Math. J. 39, 125—179 (1934) [Japanisch].

## Algebra und Zahlentheorie.

**Oldenburger, Rufus:** Transposition of indices in multiple-labeled determinants. Amer. Math. Monthly 41, 350—356 (1934).

**Piel, M.:** Eine Begründung der Resultantentheorie durch einen elementaren Beweis der Cayleyschen Konstruktion. Math. Z. 38, 650—668 (1934).

Die Resultante  $R(a)$  von  $n$  allgemeinen Formen  $f_1, \dots, f_n$  in  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ist nach Hurwitz und Macauley der g. g. T. aller  $\sigma$ -reihigen Determinanten der dialytischen Matrix  $A^{(0)}$ , welche so erhalten wird: Man multipliziere für genügend große  $s$  die Formen  $f_\nu$  der Grade  $s_\nu$  mit allen möglichen Potenzprodukten der  $x_i$  vom Grade  $s - s_\nu$  und bilde aus allen so entstehenden Formen die Koeffizientenmatrix.  $\sigma$  ist die Anzahl der Potenzprodukte vom Grade  $s$ , also die Reihenzahl der Matrix  $A^{(0)}$ . Cayley hat eine explizite Konstruktionsvorschrift für die Resultante  $R$  gegeben, in der noch weitere Matrices  $A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)}$  benutzt werden, welche komplizierter gebaut sind. Wählt man aus  $A^{(0)}$  eine beliebige  $\sigma$ -reihige Unterdeterminante  $\Delta^{(0)}$  und aus  $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$  passende Unterdeterminanten  $\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(k-1)}$ , so werden die Quotienten

$$R^{(k-1)} = \Delta^{(k-1)}; \quad R^{(k-2)} = \frac{\Delta^{(k-2)}}{R^{(k-1)}}; \quad \dots; \quad R^{(0)} = \frac{\Delta^{(0)}}{R^{(1)}}$$

ganze Funktionen der Koeffizienten  $a_\nu$  der Formen  $f_\nu$ , und es wird  $R^{(0)}$  gleich der Resultante  $R$ . Für das letzte Ergebnis hat zuerst E. Fischer [Math. Z. 26, 497 (1927)] einen Beweis gegeben, welcher die ganze Mertenssche Resultantentheorie voraussetzt. Verf. gibt nun einen direkten Beweis, indem er nachweist, daß  $R^{(0)}$  die Eigenschaften hat, welche Mertens zur Definition der Resultante benutzt. Ein zweiter Beweis wird im Anhang skizziert.

Die Matrices  $A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)}$  ( $k \leq n$ ) werden folgendermaßen konstruiert: Man bilde für  $\kappa=1, 2, \dots, k-1$  eine Matrix aus  $\kappa$  Zeilen und  $n$  Spalten, in deren letzter Zeile die Formen  $f_1, \dots, f_n$  stehen, während die übrigen  $\kappa n$  Matrixelemente unbestimmte  $\tau_{\mu\nu}$  sind. Aus dieser Matrix bilde man alle  $(k+1)$ -reihigen Determinanten, multipliziere sie mit allen möglichen Potenzprodukten der  $x_i$  vom Grade  $s - \sum s_\nu$  (die Summation erstreckt sich über die Grade  $s_\nu$ , der in der betreffenden Determinante vorkommenden  $f_\nu$ ) und entwickle die Ergebnisse nach Potenzprodukten der  $x_i$ , multipliziert mit  $\kappa$ -reihigen  $\tau_{\mu\nu}$ -Determinanten. Die Koeffizienten-



matrix dieser Entwicklungen ist  $A^{(n)}$ . Der Rang von  $A^{(n)}$  ist eine Zahl  $\sigma_n$ , die in der Arbeit angegeben wird, und  $A^{(n)}$  ist eine  $\sigma_n$ -reihige Unterdeterminante von  $A^{(n)}$ . Die Rangangabe von  $A^{(n)}$  gilt auch im Fall von  $n$  Formen mit  $m \geq n$  Unbestimmten und auch für nichtallgemeine Formen mit nichtverschwindender Resultante. Wie groß die Zahl  $k$  gewählt werden muß, damit das Hauptergebnis  $R = R_1^{(n)}$  gilt, konnte Ref. aus der Arbeit nicht entnehmen. Auch ist die Begründung  $R^{(n)} = R_1^{(n)}$  in § 8 dem Ref. unklar. *van der Waerden (Leipzig).*

**Weil, André: Une propriété caractéristique des groupes de substitutions linéaires finis.** C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1739—1742 (1934).

To every polynomial  $P(x)$  with non negative integral coeff. and a given group  $\mathfrak{D}$  of linear transformations corresponds a representation  $P(\mathfrak{D})$  of  $\mathfrak{D}$ . It is obtained by defining the product of two representations as the repr. given by the Kronecker product and the sum as the repr. obtained by arranging the repr. one after the other along the main diagonal. The repr.  $P(\mathfrak{D})$  is uniquely defined if equivalent repr. are considered as equal. The author proves the following theorem: In order that a group of unitary transformations be finite it is necessary and sufficient that there exist two polynomials  $P_1(x)$  and  $P_2(x)$  with integral non neg. coeff. such that the repr.  $P_1(\mathfrak{D})$  and  $P_2(\mathfrak{D})$  are equivalent. *F. Bohnenblust (Princeton).*

**Cartan, Élie: Remarques au sujet de la communication précédente.** C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1742—1743 (1934).

The characterisation of finite unitary groups discussed in the preceding review can be shown to be equivalent to the following one: Any group of unitary trsf. whose traces assume only a finite number of values is nec. finite. The author gives a different proof for this theorem, showing furthermore that it suffices to assume that the trace of the unit matrix is isolated among the other traces. For irreducible groups it is already sufficient to know that one trace  $\neq 0$  is isolated. *F. Bohnenblust (Princeton).*

**McCoy, Neal H.: On quasi-commutative matrices.** Trans. Amer. Math. Soc. 36, 327—340 (1934).

Die (endlichen) Matrizes  $x$  und  $y$  heißen quasi-kommutativ, wenn  $xy - yx$  mit  $x$  und mit  $y$  vertauschbar und  $\neq 0$  ist:

$$xy - yx = z \neq 0, \quad xz = zx, \quad yz = zy. \quad (1)$$

Zerfällt man die Matrix  $x$  in Diagonalkästchen, die den verschiedenen charakteristischen Wurzeln von  $x$  entsprechen, so zerfallen  $y$  und  $z$  in derselben Weise. Also kann angenommen werden, daß  $x$  und  $y$  je nur eine charakteristische Wurzel haben. Die einzige Wurzel von  $z$  ist dann Null. Die Matrix  $z$  sei vom Typus  $[n_1, n_2, \dots, n_k]$ , d. h.  $n_1, \dots, n_k$  seien die Grade ihrer Elementarteiler. Dann muß  $n_k = 1$  und  $n_i - n_{i+1} = 0$  oder 1 sein, und diese Bedingung reicht auch hin, damit bei gegebenem  $z$  quasi-kommutative Matrizes  $x$  und  $y$  existieren. Es folgt, daß der Grad  $n = \sum n_i$  mindestens 3 sein muß. Damit es zu gegebenem  $x$  eine quasi-kommutative Matrix  $y$  gebe, ist notwendig und hinreichend, daß  $n > 2$  und die Elementarteiler von  $x$  nicht alle linear sind. Für den Fall, daß  $x$  vom Typus  $[n]$  ist, werden die möglichen  $y$  alle angegeben. Der letzte Satz, über die möglichen charakteristischen Wurzeln eines Polynoms  $\psi(x, y)$ , ist eine selbstverständliche Folge eines Satzes von Lie, der besagt, daß die Matrizes der infinitesimalen Transformationen einer auflösbaren linearen Lieschen Gruppe stets gleichzeitig auf Dreiecksgestalt (Nullen unterhalb der Hauptdiagonale) gebracht werden können. Die Relationen (1) besagen nämlich, was Verf. nicht bemerkt hat, daß die Matrizes  $x, y, z$  als infinitesimale Transformationen eine Darstellung einer ganz bestimmten dreigliedrigen Gruppe erzeugen. *van der Waerden (Leipzig).*

**Foussianis, Chr.: Sur les zéros des polynômes.** Prakt. Akad. Athénōn 9, 22—26 (1934).

Auf Grund eines Satzes von Carathéodory und Fejér (C. R. Acad. Sci., Paris 144, 163—165) wird folgender Satz bewiesen: Hat das Polynom

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

mindestens  $k (\geq 1)$  Nullstellen außerhalb des Kreises  $|z| = r (\geq 1)$ , so enthält es



mindestens eine Nullstelle im Kreisinge  $r \leq |z| < r(1 + |a_1| + \dots + |a_n|)^{\frac{1}{k}}$ . — Die anderen zwei Sätze des Verf. gelten nur dann, wenn der absolute Betrag des einem Koeffizienten von  $f(z)$  größer ist, als die Summe der absoluten Beträge der übrigen Koeffizienten. Sz. Nagy (Szeged).

**Levi, Friedrich:** Zur Irreduzibilität der Kreisteilungspolynome. *Compositio Mathematica* 1, 303—304 (1934).

Einfacher Beweis dieser Irreduzibilität, der dem Dedekindschen Beweis nahe verwandt ist und auf dem Vergleich der Zerlegung von  $x^m - 1$  im rationalen Zahlkörper  $P_0$  mit der Zerlegung im endlichen Primkörper  $P_p$  beruht. Es genügt, zu beweisen, daß aus  $f(\alpha) = 0$  folgt  $f(\alpha^p) = 0$ , wo  $\alpha$  eine primitive  $m$ -te Einheitswurzel,  $f(x)$  ein irreduzibler Teiler des Kreisteilungspolynoms und  $p$  eine zu  $m$  prime Primzahl ist. Geht man vom ganzzahligen Polynombereich  $R_0[x]$  zum Restklassenring  $P_p[x]$  über, so entspricht dem  $f(x)$  ein Polynom  $g(x)$ , welches in einer Erweiterung  $P_p(\beta)$  von  $P_0$  eine Nullstelle  $\beta$  besitzt. Der Körper  $P_p(\beta)$  ist homomorphes Bild von  $R_0[\alpha]$ . Bei der Abbildung gehen  $\alpha$  in  $\beta$  und die Wurzeln  $\alpha^r$  von  $f(x)$  in Wurzeln  $\beta^r$  von  $g(x)$  über. Unter diesen muß bekanntlich  $\beta^p$  vorkommen, da  $\beta \rightarrow \beta^p$  ein Automorphismus von  $P_p(\beta)$  ist. Also kommt  $r = p$  unter den Exponenten  $r$  vor, q. e. d. van der Waerden.

**Wedderburn, J. H. M.:** Boolean linear associative algebra. *Ann. of Math.*, II. s. 35, 185—194 (1934).

The minimum Boolean field in which an algebra  $A$  can exist is finite, and  $A$  can be expressed as the direct sum of algebras  $A_i$  in each of which the constants of multiplication are either 0 or 1. If  $u_i$  form a basis, a number  $x = \sum \xi_i u_i$  can be basic (an element of some basis) if and only if  $\sum \xi_i = 1$ ,  $\xi_i \xi_j = 0$  ( $i \neq j$ ). A group algebra is one having a basis  $u_1, \dots, u_n$  which constitute a finite group; it is characterized by the property that every basic element, and only such elements and their scalar multiples, have inverses. If the irreducible group algebra  $A$  of group  $\mathfrak{A}$  has the invariant subalgebra  $B = (b_1, \dots, b_\beta)$  of group  $\mathfrak{B}$ , and if  $Ba_i$  are a complete set of co-sets of  $B$  in  $A$  and  $b = \sum b_i$ , then  $b a_i$  form a group algebra whose group is the quotient group  $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ . The familiar Peirce decomposition relative to an idempotent is of assistance in the classification of types, but cannot be carried as far as in the numerical theory. A table of the 25 irreducible types in two units is given. MacDuffee (Columbus).

**Ore, Oystein:** Contributions to the theory of finite fields. *Trans. Amer. Math. Soc.* 36, 243—274 (1934).

Verf. wendet die früher von ihm entwickelte Methode der  $p$ -Polynome [*Trans. Amer. Math. Soc.* 35 (1933); dies. Zbl. 7, 151] auf Galoisfelder an, ohne Voraussetzungen der früheren Resultate. Es handelt sich teils um neue Ableitung alter Resultate (Satz von der Normalbasis), teils um neue Resultate, insbesondere um explizite Aufstellungen irreduzibler Polynome. Hier zeigt es sich, daß die Methode der  $p$ -Polynome ein einheitliches Prinzip ergibt, das außer zu neuen auch zu allen bekannten Typen führt. — Der Schluß bringt einige zahlentheoretische Anwendungen: einen einfachen Beweis des bekannten Reziprozitätsgesetzes in Funktionenkörpern mit Galoisfeld als Konstantenbereich, und für Galoisfelder einen Beweis des bekannten Satzes: aus  $N(\alpha) = 1$  folgt  $\alpha = \beta^{1-s}$ . Es sei aber bemerkt, daß schon Beweise in der Literatur vorliegen, die gleichmäßig für Grundkörper mit endlich und unendlich vielen Elementen gelten [z. B. A. Speiser, *Math. Z.* 5 (1919); vgl. auch E. Noether, *Math. Ann.* 108 (1933); dies. Zbl. 7, 295]. E. Noether (Bryn Mawr).

**Raudenbush jr., H. W.:** Ideal theory and algebraic differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 36, 361—368 (1934).

Verf. entwickelt die Idealtheorie in „Differentialringen“: das sind Ringe, bei denen noch eine weitere Operation existiert, „Differentiation“, mit den üblichen Rechenregeln: die Ideale sind abgeschlossen gegenüber Differentiation, „Differentialideale“. So ergeben sich insbesondere einfache Beweise für die Resultate von Ritt (vgl. dies. Zbl. 5, 394); denn die algebraischen Differentialausdrücke bilden einen „Diffe-



rentialring aus Polynomen“. In solchen Polynomringen braucht der Satz von der endlichen Idealbasis nicht zu gelten, wie aus einem Beispiel von Ritt folgt. — Verf. zeigt aber, daß der Basissatz wieder gültig wird, wenn man sich auf „perfekte Differentialideale“ beschränkt, bei denen aus der Zugehörigkeit von  $a^1$  die Zugehörigkeit von  $a$  folgt. Der Basissatz bedeutet hier, daß eine Potenz jedes Elements sich linear durch die Basis und endlich viele ihrer Ableitungen ausdrücken läßt, mit Differentialpolynomen als Koeffizienten. Aus dem Basissatz folgt die Gültigkeit der allgemeinen Idealtheorie. Insbesondere zieht die Darstellung als Durchschnitt endlich vieler Primärideale, hier Primideale, die von Ritt gegebene Reduktion eines Differentialsystems auf endlich viele irreduzible nach sich; an dieser Reduktion ist übrigens auch der Beweis des Basissatzes orientiert.

*E. Noether (Bryn Mawr).*

**Tschebotarow, Nikolaj: Die Probleme der modernen Galoisschen Theorie.** Comment. math. helv. 6, 235—283 (1934).

§ 1. Verf. geht zunächst auf die von Mertens, Schatunowski und kürzlich von Loewy gegebene Begründung der klassischen Galoisschen Theorie ein und schildert dann das Krullsche Verfahren zur Erweiterung der Galoisschen Theorie auf unendliche Körper. — Bei algebraischen Funktionen kann man die Galoissche Gruppe so aufstellen, daß man die Gesamtheit ihrer Wertesysteme betrachtet, die die absolute Riemannsche Fläche ausmachen, statt die Funktionen des Körpers ins Auge zu fassen. Die verschiedenen Monodromiegruppen, die gewisse Rationalitätsbereiche invariant lassen, bestimmen hier die Galoissche Gruppe und ihre Untergruppen. — § 2. Das bisher ungelöste Problem der Bestimmung von Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe kann auf 3 verschiedene Arten aufgefaßt werden: 1. Man finde irgendwelche Gleichungen, deren Gruppe mit einer gegebenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  isomorph ist. 2. Man finde die allgemeinste parametrische Form der Koeffizienten einer Gleichung, deren Gruppe mit  $\mathfrak{G}$  oder einem Teiler von  $\mathfrak{G}$  isomorph ist. Die Darstellbarkeit der Koeffizienten in dieser Form soll notwendige und hinreichende Bedingung dafür sein, daß die Gruppe der Gleichung entweder mit  $\mathfrak{G}$  oder mit einem Teiler von  $\mathfrak{G}$  isomorph ist. 3. Man stelle ein Verfahren auf zur Bestimmung von Gleichungen, deren Gruppe mit  $\mathfrak{G}$  isomorph ist. Dieses Verfahren soll alle Gleichungen dieser Art erschöpfen, falls es hinlänglich weit fortgesetzt wird. E. Noether zeigte, daß man 1. aus 2. folgern kann. 2. ist aber stets lösbar, falls der Satz von der rationalen Minimalbasis Gültigkeit hat. Verf. zeigt auch, daß man mittels der bekannten M. Bauerschen Prinzipien 3. aus 2. ableiten kann. Es ist sogar möglich, durch dieses Verfahren alle Gleichungen, deren Koeffizienten eine gegebene Grenze nicht überschreiten, mit vorgeschriebener Gruppe zu bekommen. Man hat dabei nur die Abschätzung des Verf. heranzuziehen für die Grenzen, unterhalb deren eine vorgeschriebene Anzahl von Primzahlen liegen, die zu einer gegebenen „Ableitung“ von  $S$ , einer Permutation der Galoisschen Gruppe, gehören. Die Aufgaben 1 und 3 können auf Relativkörper erweitert werden. 1. Lautet hier folgendermaßen: Es sei ein algebraischer Zahlkörper  $k$  gegeben, dessen Gruppe  $g$  sein möge. Es sei außerdem eine abstrakte Gruppe  $\mathfrak{G}$  mit einem Normalteiler  $\mathfrak{H}$  gegeben, so daß die Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  mit  $g$  isomorph ist. Man finde die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß es einen Oberkörper  $K$  von  $k$  gibt, dessen Gruppe mit  $\mathfrak{G}$  isomorph ist. Schritte zur Lösung dieser Aufgabe sind vom Verf. und von Scholz unternommen worden. Verf. zeigt auch an einem Beispiel, daß nicht immer eine Lösung zu existieren braucht. Man erkennt ferner, daß die Lösung der Aufgabe nicht nur durch die Strukturuntersuchung der Gruppe  $\mathfrak{G}$  durchgeführt werden kann, sondern daß auch arithmetische Eigenschaften der Körper herangezogen werden müssen. — § 3. Einen solchen Einblick in die arithmetische Struktur eines Körpers bekommt man durch Betrachtung der den Körper bestimmenden unendlich vielen Invarianten, den Artinschen Symbolen  $\left(\frac{k}{p}\right)$

und deren Reziprozitätsgesetz. — § 4. Verf. zeigt, daß das bekannte Resolventenproblem ein spezieller Fall des Problems ist: Es sei ein Körper  $K$  rationaler Funktionen mehrerer Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gegeben. Man bestimme den wahren Transzendenzgrad von  $K$  in bezug auf seinen gewissen Unterkörper  $k$ , d. h. die kleinste Zahl  $m$ , so daß  $K$  als direktes Produkt eines Körpers algebraischer Funktionen von  $m$  Veränderlichen, die in  $k$  aufgehen, und eines gewissen Unterkörpers von  $k$  erscheint. (Um das Resolventenproblem zu erhalten, hat man nur für  $k$  den Körper der elementarsymmetrischen Funktionen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  der Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  zu wählen.) Verf. geht dann auf die Kleinschen Arbeiten über Gleichungen 5. Grades ein, in denen F. Klein das Resolventenproblem mit dem Formenproblem in Zusammenhang bringt, woraus man dann die Tatsache ableiten kann, daß jede Gleichung 5. Grades auf die Gestalt  $y^5 + 15y^4 - 10\gamma y^4 + 3\gamma^2 = 0$  gebracht werden, d. h. auf eine einparametrische Resolvente reduziert werden kann, wenn man sie einer rationalen Transformation unterwirft, deren Koeffizienten höchstens die Irrationalität  $\sqrt{D}$  enthalten, wobei  $D$  die Diskriminante der vorgegebenen Gleichung 5. Grades bedeutet. Verf. geht dann auf seine Arbeiten über den



Zusammenhang der Reduktionsfähigkeit einer Gleichung und der Darstellbarkeit ihrer Galois-schen Gruppe als Transformationsgruppe von einer möglichst kleinen Anzahl von Variablen ein. Führt man den Begriff der Einkleidungsgruppe wie folgt ein: Ist  $\mathcal{G}$  eine gegebene endliche Gruppe, so heißt eine kontinuierliche Gruppe  $\Gamma$  dann und nur dann Einkleidungsgruppe von  $\mathcal{G}$ , wenn sie den folgenden Bedingungen genügt: 1.  $\Gamma$  enthält eine mit  $\mathcal{G}$  isomorphe Gruppe als Teiler. 2. Es gibt keinen echten Teiler von  $\Gamma$ , welcher die Eigenschaft 1 besitzt. 3. Es gibt keine echte Faktorgruppe von  $\Gamma$ , welche die Eigenschaft 1 besitzt. Dann gilt der folgende vom Verf. bewiesene Satz: Eine algebraische Gleichung mit unbeschränkt veränderlichen Koeffizienten besitzt eine Resolvente mit  $k$  Parametern dann und nur dann, wenn ihre Galois'sche Gruppe  $\mathcal{G}$  eine Einkleidungsgruppe hat, welche im  $k$ -dimensionalen Raume darstellbar ist. — Im letzten Paragraphen behandelt Verf. noch allgemeine Fragen der Körpertheorie. Insbesondere behandelt er die Probleme der Identität von 2 algebraischen Körpern, der rationalen Minimalbasis, der einfachsten Auflösung von Gleichungen mit mehreren Veränderlichen, der Bestimmung des „wahren Transzendenzgrades“ eines Oberkörpers. Schließlich geht Verf. noch auf die modernen Untersuchungen von Siegel, Mordell und Weil u. a. über die Rationalitätsfragen für die Perioden elliptischer und Abelscher Integrale ein. *Wegner* (Darmstadt).

**Faddejeff: Tabularisierung der Galois'schen Ringe und Körper dritten Grades.** *Trav. Inst. phys.-math. Stekloff* 5, 19—23 (1934) [Russisch].

**Scholz, A., und O. Taussky: Die Hauptideale der kubischen Klassenkörper imaginär-quadratischer Zahlkörper: ihre rechnerische Bestimmung und ihr Einfluß auf dem Klassenkörperturm.** *J. reine angew. Math.* 171, 19—41 (1934).

Erstes Ziel dieser Arbeit ist es, an den Körpern  $P(\sqrt{-4027})$ ,  $P(\sqrt{-9748})$ ,  $P(\sqrt{-3299})$ , deren 3-Klassengruppen bzw. vom Typus  $(3,3)$ ,  $(3,3)$ ,  $(3,9)$  sind, das Hauptidealwerden („Kapitulieren“) der Idealklassen in den kubischen Teilkörpern  $K_i$  des absoluten Klassenkörpers rechnerisch zu verfolgen. Welche Idealklassen in einem gegebenem  $K_i$  kapitulieren, wird durch Relationen im rationalen Zahlkörper entschieden. Die ganze Methode und die verschiedenen Rechenkunstgriffe können hier nicht einzeln geschildert werden, es sei aber auf eine interessante Methode hingewiesen, in einem kubischen Körper  $P(\vartheta)$  eine Einheit zu bestimmen. Die diophantische Gleichung  $N(x + y\vartheta + z\vartheta^2) = 1$  zu lösen, ist praktisch meist unmöglich. Daher bestimme man die Normen einer größeren Reihe von Zahlen  $x + y\vartheta = \delta$  und mit Hilfe der Normen die Primfaktorzerlegung der  $\delta$ . Kommen eine Reihe Primideale in möglichst verschiedenen Kombinationen in den Zerlegungen der  $\delta$  vor, so wird es möglich sein, ein Potenzprodukt dieser  $\delta$  zu finden, das eine Einheit ist. — Im zweiten Teil der Arbeit wird gezeigt, wie aus der Kapitulation der Idealklassen in den Teilkörpern des Klassenkörpers auf die Struktur der Gruppe des zweiten Klassenkörpers geschlossen werden kann [für den Fall, daß die Klassengruppe vom Typus  $(3,3)$  ist]. Daß dies möglich ist, folgt aus den Ergebnissen Artins, daß die Kapitulation einer Idealklasse in einem Teilkörper des Klassenkörpers mit einer Relation in der Gruppe des zweiten Klassenkörpers gleichbedeutend ist. Außerdem wird noch das frühere Resultat Scholz' herangezogen, daß in einem zyklischen Teilkörper  $n$ -ten Grades des Klassenkörpers eines imaginärquadratischen Grundkörpers genau eine Untergruppe  $n$ -ter Ordnung der Klassengruppe kapituliert. Aus diesem Satz schließt man, daß in den behandelten Fällen die Klassenzahl des Klassenkörpers durch 3 teilbar ist. Daher ist der zweite Klassenkörper mindestens zweistufig. Im dritten Teil der Arbeit wird aber gezeigt, daß für  $P(\sqrt{-4027})$  und  $P(\sqrt{-3299})$  der 3-Klassenkörperturm mit dem zweiten Klassenkörper endigt. Dies wird dadurch bewiesen, daß die im zweiten Teil ermittelten Relationen für die Gruppen des zweiten Klassenkörpers es gruppentheoretisch ausschließen, daß diese Gruppen als maximale zweistufige Faktorgruppe einer anderen Gruppe auftritt, deren Ordnung eine Potenz von 3 ist. Auch für den dritten Körper  $P(\sqrt{-9784})$  wird das gleiche Resultat kurz skizziert.

*Deuring* (Leipzig).

**Bungers, Rolf: Über die Koeffizienten von Kreisteilungspolynomen.** Göttingen: Diss. 1934. 15 S.

Verf. befaßt sich mit dem Problem der Unbeschränktheit der Koeffizienten der  $n$ -ten Kreisteilungspolynome



$$K_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\xi(n)} a_\lambda x^\lambda, \quad n = p_1 p_2 p_3, \quad 2 < p_1 < p_2 < p_3,$$

wo  $p_1, p_2, p_3$  Primzahlen sind. Verf. beweist zunächst den Satz: „Ist  $\lambda < \kappa p_2 p_3$ , wo  $\kappa$  eine der Zahlen  $1, 2, \dots, \frac{p_1-1}{2}$  bedeutet, dann ist  $|a_\lambda| \leq 2\kappa$ .“ Ferner wird von ihm ein Mittel geboten, Kreisteilungspolynome zu konstruieren, welche „sehr große“ Koeffizienten haben. Und zwar bewies Verf., daß, wenn  $p_1 > 3$ ,  $p_2 = p_1 + 2$  und  $2p_3 \equiv -1 \pmod{p_1 p_2}$ , so ist  $a_\lambda = +1$ , wo  $\varrho = \frac{p_1-1}{2}$ ,  $\lambda = (\varrho-1)p_2 p_3 + p_2 + p + (\varrho-1)$ . Dieser Satz ist dadurch bemerkenswert, daß bei  $K_n(x)$ , wo  $n$  nur durch zwei Primzahlen teilbar ist, die Koeffizienten entweder gleich  $\pm 1$  oder 0 sind.) Ist also die bekannte Vermutung, daß unendlich viele Paare von Primzahlzwillingen existieren, wahr, so ist damit auch die Unbeschränktheit der Koeffizienten schon bei der  $K_n(x)$ , wo  $n$  nur drei ungerade Primteiler hat, bewiesen. Zu beachten ist, daß bis auf den Dirichletschen Satz über die arithmetische Progression alles mit elementaren Mitteln bewiesen wird.

Lubelski (Warszawa).

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

Sierpiński, W.: Remarque sur un ensemble de M. Lusin. Fundam. Math. 22, 312 bis 314 (1934).

Den Satz über Zerlegungen von Linienstrecken (vgl. dies. Zbl. 8, 247), welcher von S. Banach und C. Kuratowski in Fundam. Math. 14, 128—131 (1929) aus der Kontinuumhypothese gefolgert und zur Lösung des sog. verallgemeinerten Maßproblems verwendet wurde, leitet nun der Verf. direkt aus folgender, von N. Lusin in C. R. Acad. Sci., Paris 158, 1259 gefolgerten Konsequenz der Kontinuumhypothese her: es gibt eine lineare Punktmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums, die mit jeder linearen nirgendsdichten Menge höchstens abzählbar viele gemeinsame Punkte hat.

B. Knaster (Warszawa).

Sierpiński, Waclaw: Sur une certaine famille de suites infinies de nombres réels. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3, 75—78 (1934).

Sierpiński, Waclaw: Un théorème équivalent à l'hypothèse du continu. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 16, 103—107 (1933).

Both these papers contain several theorems equivalent to the hypothesis of the continuum  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ . Hence, in the first of them there is established the equivalence of that hypothesis with the following theorems: I. There exists a non-enumerable set  $F$  of sequences of real numbers such that for any given number  $x$  every sequence in  $F$ , with the exception at most of those belonging to an enumerable subset of  $F$ , contains infinitely many of terms equal to  $x$ . II. There exists a sequence  $\{f_n(t)\}$  of real functions such that for any given number  $x$  and at any point  $t$  with the exception at most of an enumerable set of points, depending in general on  $x$ , the sequence  $\{f_n(t)\}$  contains infinitely many of terms equal to  $x$  (Theorem II is an easy corollary of Theorem I). — In the second paper the author proves the equivalence of the hypothesis of continuum with the proposition: III. Let  $P$  be a property of sets and  $\Phi$  a family of power  $\leq 2^{\aleph_0}$ , whose elements are sets of real numbers. Suppose that 1) every set containing one point only has the property  $P$ , 2) every set has the property  $P$  whenever it is either the sum of a sequence of sets with the property  $P$  or a subset of a set enjoying that property, 3) every set with the property  $P$  is contained in one at least of the sets belonging to  $\Phi$ . Then any set which does not possess the property  $P$  contains a non-enumerable subset  $A$  such that for any set  $E$  with the property  $P$  the set  $A \cdot E$  is at most enumerable one. There are given two examples of a property  $P$  and of a family  $\Phi$  so as to satisfy the



conditions of Theorem III. Thus a)  $P$  means that the set is of the first category, while  $\Phi$  is the family of all linear sets  $F_\sigma$  of the first category; b)  $P$  means that the set is of measure zero, while  $\Phi$  is the family of all linear sets  $G_\delta$  of measure zero. Hence every set of the second category (of positive outer measure) contains a non-enumerable subset  $A$  such that for any set  $E$  of the first category (of measure zero) the set  $A \cdot E$  is at most enumerable one. — The discussion of those and analogous results may be found in the recent monograph of the author [W. Sierpiński, *Hypothèse du continu* (Monografie matematyczne), Warszawa (1934)].

Saks (Warszawa).

**Lusin, N.:** *Sur quelques problèmes difficiles de la théorie des fonctions.* C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1296—1298 (1934).

The following four problems are typical. Given a non-enumerable set  $H$  demonstrate (I) the existence of a function  $f$  defined on  $H$  which cannot be completed to yield a function of Baire; (II) the existence of two parts of  $H$  which are non-separable  $B$ . Given a set  $H$  which is complementary to an analytic set establish (III) the existence of a part of  $H$  which is not complementary to an analytic set; (IV) the existence of two disjoint subsets  $H_1, H_2$ , of  $H$  which are complementary to an analytic set and are not separable  $B$ . Problems I and II are solved by the method of infinite descent (this Zbl. 9, 55). P. Novikoff has announced in a letter to the author that he possesses a solution of these two problems. Most problems of this type admit a precise solution based on the method of infinite descent (this Zbl. 9, 55) and appear to be otherwise insoluble. Problems II and IV cannot be solved by the methods of Zermelo or the hypothesis of the continuum, unless we assume that  $H$  contains a perfect set. Problems I and III can be resolved by these methods if we admit the hypothesis of the continuum. The following partial solution of IV is due to Novikoff. A set  $H$  is mince (Denjoy) if it contains no perfect set. Then one can add to the given set  $H$  a set  $H'$  complementary to an analytic set so that  $H + H'$  admits a solution of problem IV. These problems are closely related to certain general questions regarding the nature of our knowledge of the continuum. From the point of view of Borel we know little more than: the continuum is not enumerable. It is true that the classic continuum is closed, but to say that a non-enumerable set is closed is to say only that this closure is a reunion of all the elements previously invented. Thus the closure of the classic continuum is merely illusory. This leads to the problem: given  $H$ , non-enumerable, is there a part  $H'$  of  $H$  which is (relative to  $H$ ) measurable  $M$  and definitely of class  $\alpha$ , analytic or projective? In the first case one is concerned with a part  $H'_1$  of  $H$  separable from  $H - H'$  by a set  $E$ , measurable  $B$  in the absolute sense, and of class  $(\alpha \text{ minimum})$ . The existence of the sets and functions of all classes has been demonstrated in the case of the classic continuum, but presents grave difficulties in the relativistic theory.

E. W. Chittenden (Iowa City).

**Lusin, N.:** *Sur la décomposition des ensembles.* C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1671 bis 1674 (1934).

In preceding notes (this Zbl. 9, 55 and the prec. ref.) P. Novikoff and the author have presented the following proposition relative to the decomposition of sets of points: every non-enumerable set  $E$  can be decomposed in two parts,  $E_1$  and  $E_2$ , having no point in common, which are non-separable  $B$ . A proof of this proposition due to Novikoff is given for the cases,  $E$  is not always of the first category; and,  $E$  is not of measure zero.

E. W. Chittenden (Iowa City).

**Novikoff, P.:** *Sur une propriété des ensembles analytiques.* C. R. Acad. Sci. URSS 22 273—275 u. franz. Zusammenfassung 275—276 (1934) [Russisch].

Erweiterung der Lusinschen  $B$ -Separabilität (N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930; „I. Prinzip“) von zweien auf endlich viele analytische Mengen: ist nämlich ihr Durchschnitt leer, so kann man sie einzeln in (folglich ebenso viele) Borelsche Mengen einschließen mit ebenfalls leerem Durchschnitt. Anwendung:



Ist  $f(x)$  eine höchstens  $m$ -fache (d. h. für jeden Wert von  $x$  höchstens  $m$  Werte annehmende) reelle Funktion und ist für je zwei Werte  $a$  und  $b$  von  $x$  die Menge der die Ungleichung  $a \leq f(x) \leq b$  erfüllenden Werte von  $x$  analytisch, so ist die „Kurve  $y = f(x)$ “, d. h. Menge der Punkte  $(x, y)$  mit  $y \in f(x)$ , eine ebene analytische Menge, die zu einer Borelschen „Kurve  $y = \varphi(x)$ “, wo  $\varphi(x)$  ebenfalls eine höchstens  $m$ -fache Funktion ist, ergänzt werden kann. Zwei weitere Folgerungen enthalten Bedingungen, damit die „Kurve  $y = f(x)$ “ selbst eine Borelsche Menge sei. B. Knaster.

**Liapunov, A.: Sur la séparabilité des ensembles analytiques.** C. R. Acad. Sci. URSS 2, 276—279 u. franz. Zusammenfassung 279—280 (1934) [Russisch].

Erweiterung der Ergebnisse von Novikov (vgl. vorst. Referat) vom endlichen auf den abzählbaren Fall. Insbesondere eine zur Novikovschen ganz analoge Anwendung auf Funktionen, die für jedes  $x$  eine endliche unbeschränkte bzw. unendliche wohlgeordnete Menge von Werten annehmen. B. Knaster (Warszawa).

**Lusin, N.: Quelques remarques sur la séparabilité multiple.** C. R. Acad. Sci. URSS 2, 280—284 u. franz. Zusammenfassung 284 (1934) [Russisch].

Erweiterung der  $CA$ -Separabilität (N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930; „II. Prinzip“) von 2 auf 3 analytische Mengen  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ): es gibt nämlich stets drei ebenfalls analytische Mengen  $A_i$  derart, daß  $E_i - E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \subset CA_i$  gilt ( $CA$  = Komplementärmenge zu  $A$ ) und daß  $CA_1 \cdot CA_2 \cdot CA_3$  leer ist. Es wird u. a. gefragt 1. ob die vermutlich für beliebige endliche Anzahl mögliche Erweiterung noch für abzählbar viele analytische Mengen gültig ist, 2. ob etwa die drei Differenzmengen  $E_i - E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$  nicht immer  $B$ -separabel sein müssen, 3. in welcher Weise könnten die Sätze über einseitige  $A$ -Separabilität bzw. über die  $CA$ -Separabilität von  $CA$ -Mengen, für mehr als zwei Mengen formuliert werden. Zum Schluß wird die Bedeutung des folgenden, von Liapunov (vgl. vorst. Referat) verwendeten Hilfssatzes hervorgehoben: Ist in einem euklidischen Raume der Durchschnitt einer Folge analytischer Mengen leer und ihre Komplementär Mengen in sog. Konstituenten zerlegt, so gibt es eine (feste) transfinite Ordnungszahl  $\alpha < \Omega$  derart, daß jeder Punkt des Raumes bereits in den ersten  $\alpha$  Konstituenten von mindestens einer der Mengen liegt. B. Knaster (Warszawa).

**Mazurkiewicz, S.: Über total zusammenhangslose Mengen.** Fundam. Math. 22, 267—269 (1934).

Verf. befaßt sich mit folgendem, zum Ideenkreise der Einbettungssätze gehörendem Problem: durch Hinzufügung einer wievioldimensionalen Menge  $M$  (von möglichst niedriger Dimension) kann ein gegebener  $n$ -dimensionaler metrischer separabler Raum  $R$  zu einem gleichdimensionalen vollständigen bzw. kompakten Raume  $E = R + M$  ergänzt werden? Nach früheren Teilergebnissen sind Fälle bekannt, in welchen allein die Vervollständigung von  $R$  bei  $n > 0$  schon  $\dim M \geq \dim R - 1$  (Tamarkin, Math. Ann. 98, 655) bzw.  $\dim M = \dim R$  (Mazurkiewicz, Fundam. Math. 10, 318; ein ganz einfaches Beispiel jetzt in der ref. Arbeit angegeben) verlangt. Andererseits kann nach Hurewicz (dies. Zbl. 5, 417 und 7, 132) die Ergänzung eines kompakten  $R$  zu einem gleichdimensionalen, lokal zusammenhängenden und sogar henkellosen Kontinuum  $E$  bei  $n > 1$  bereits stets mit  $\dim M \leq 2$  geschehen. — Verf. beweist nun, daß die Kompaktifizierung von total zusammenhangslosen Räumen  $R$  (d. h. von Räumen mit lauter einpunktigen Quasikomponenten) bei  $n > 0$  notwendig  $\dim M = \dim R$  verlangt. B. Knaster (Warszawa).

**Besicovitch, A. S.: Concentrated and rarified sets of points.** Acta math. 62, 289—300 (1934).

I. Eine überabzählbare Menge  $E$  heiße konzentriert, wenn es eine abzählbare Menge  $H$  gibt derart, daß jede  $H$  überdeckende offene Menge auch alle Punkte von  $E$  mit Ausnahme höchstens abzählbar vieler enthält. Es sei nun  $\varphi(x)$  eine für  $x > 0$  definierte positive monotone Funktion mit  $\varphi(+0) = 0$ , und  $\{J_\nu\}$  eine beliebige Folge von  $E$  überdeckenden Intervallen der Länge  $l_\nu < \lambda$ ;  $m_\lambda^q E$  sei die untere Grenze von



$\sum \varphi(l_i)$ . Verf. nennt  $m_\varphi E = \lim m_\varphi^\lambda E$  das äußere  $\varphi$ -Maß von  $E$ . Ist  $E$  konzentriert, so verschwindet für jede stetige monotone Funktion  $\varphi$  sowohl  $m_\varphi E$  als auch die Variation von  $\varphi$  auf  $E$ . Hingegen kann es keine überabzählbare  $B$ -meßbare Mengen dieser Eigenschaft geben. Die Existenz konzentrierter Mengen wird durch transfinite Induktion bewiesen; dabei wird, wie auch im folgenden, die Richtigkeit der Kontinuumshypothese angenommen. — II. Eine überabzählbare ebene Menge  $E$  heiße verdünnt, wenn jede Teilmenge, deren ebenes Maß verschwindet, höchstens abzählbar ist. Es sei  $K$  das Einheitsquadrat, und  $i$  durchlaufe die transfiniten Zahlen der ersten Klasse.  $E_i$  sei die Gesamtheit der  $G_\delta$ -Mengen aus  $K$ , deren Maß verschwindet,  $P_i$  diejenige der perfekten Mengen positiven Maßes aus  $K$ . ( $G_\delta$  = Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen.) Man wähle aus  $P_1 - P_1 E_1$  einen Punkt, aus  $P_2 - P_2(E_1 + E_2)$  einen weiteren u. s. f. durch transfinite Induktion. Die Vereinigungsmenge  $G$  dieser Punkte ist verdünnt und hat folgende Eigenschaften:  $G$  hat das äußere Maß 1 und ist zweidimensional nicht meßbar; hingegen ist  $G$  linear meßbar (Maß  $\infty$ ), hat aber keine Teilmenge positiven äußeren linearen Maßes. — Es wird noch bemerkt, daß diese Anomalie nicht vorkommen würde, wenn eine ebene Menge nur dann linear meßbar hieße, wenn es eine sie enthaltende  $G_\delta$ -Menge gibt, die sich von ihr nur um eine lineare Nullmenge unterscheidet.

Willy Feller (Kopenhagen).

Busemann, H., und W. Feller: Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale. Fundam. Math. 22, 226—256 (1934).

Definitionen: 1. Wenn  $R$  ein System meßbarer Mengen positiven Maßes des  $n$ -dimensionalen Raumes ist, von denen sich auf jeden Punkt des Raumes eine Teilfolge zusammenzieht, so gilt für  $R$  der „Dichtesatz“, wenn für jede meßbare Menge  $K$  in fast allen Punkten  $Q$  des Raumes für jede sich auf  $Q$  zusammenziehende Folge  $(Q_k)$  aus  $R$   $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(Q_k \cdot K)}{m(Q_k)}$  existiert, und zwar für  $Q \subset K$  gleich 1, sonst gleich 0 ist; 2.  $\sigma_\alpha(K)$  sei die Vereinigungsmenge aller Mengen  $Q$  aus  $R$ , in denen die mittlere Dichte der meßbaren Menge  $K$ ,  $\frac{m(Q \cdot K)}{m(Q)}$ , größer als  $\alpha$  ist. Es wird u. a. bewiesen: Für die Gültigkeit des Dichtesatzes ist hinreichend, daß für jedes  $\alpha$  zwischen 0 und 1 und alle beschränkten meßbaren Mengen  $K$  die Ungleichung  $m(\sigma_\alpha(K)) < C(\alpha) \cdot m(K)$  gilt, wobei  $C(\alpha)$  nur von  $\alpha$  und  $R$ , nicht von  $K$  abhängt. Diese Bedingung ist auch notwendig, wenn  $R$  mit irgendeiner Menge  $Q$  auch alle Mengen enthält, welche zu  $Q$  „ähnlich und ähnlich gelegen“ sind. Das System aller achsenparallelen Parallelepipede (aller Intervalle) genügt der Bedingung, dagegen das System aller rechtwinkligen Parallelepipede nicht. Daraus folgt, daß für ersteres der Dichtesatz gilt, wie auch schon von Saks in seiner Monographie: *Théorie de l'intégrale* (Warszawa 1933), 231 f. gezeigt wurde. In einfacher Weise folgt aus dem Dichtesatz: Wenn  $f(Q)$  meßbar und beschränkt ist, so ist das Integral  $\int_K f(Q) \cdot dQ$  in fast allen Punkten  $Q$  differenzierbar bezüglich der Mengen eines

(übrigens willkürlich gewählten) Systems  $R$ , für das der Dichtesatz gilt, und die Ableitung hat den Wert  $f(Q)$ . Es wird weiter eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür abgeleitet, daß bezüglich eines Systems, das mit irgendeiner Menge  $Q$  alle Mengen enthält, welche zu  $Q$  „ähnlich und ähnlich gelegen“ sind, die unbestimmten Integrale über beliebige Funktionen fast überall differenzierbar sind. Die Würfel und die Kugeln genügen dieser Bedingung, die Intervalle dagegen nicht. Es gibt also totalstetig additive Mengenfunktionen, die sich nach Intervallen nicht differenzieren lassen.

J. Ridder (Groningen).

Saks, S.: Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral. Fundam. Math. 22, 257—261 (1934).

After Busemann and Feller, see prec. ref., it is not always possible that the integral of a summable function  $f(x, y)$  has at almost every point  $(x, y)$  a differential coefficient in relation to the intervals (i. e. the rectangles with sides parallel to the



axis). This is an immediate consequence of the following theorem of Saks: If  $\mathfrak{R}$  be the space of the functions  $f(x, y)$  summable over the square  $S = [0, 1; 0, 1]$  (with the ordinary norm  $\|f\| = \int_S |f(x, y)| dx dy$ ), then, except for the functions belonging to a set of the first category in  $\mathfrak{R}$ , every function  $f$  in  $\mathfrak{R}$  satisfies the condition

$$\limsup_{h, k \rightarrow 0} \frac{1}{4hk} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \int_{y_0-k}^{y_0+k} f dx dy = +\infty$$

at every point  $(x_0, y_0)$  in  $S$ . A remark of Zygmund concerning the difference between the Fourier series of one and those of more variables is added. *J. Ridder.*

**Favard, J.:** Sur les intégrales curvilignes. Ann. École norm., III. s. **51**, 1—44 (1934).

The author starts with the remark that the construction which is used to define an integral of the form  $\int_C f dg$ , where  $C$  is a rectifiable Jordan arc, can clearly be extended

to the case when  $C$  is a general point set, provided only that it is possible to linearly order the points of  $C$  in a certain properly generalized sense. According to Kuratowski (Théorie des continus irréductibles entre deux points, Fundam. Math. **10**, 225—275), such a linear order can be established for every continuum which is irreducible between two points. Using this result of Kuratowski, the author defines, in a way similar to the one followed in the case of Stieltjes integrals, the integral  $\int_C f dg$ , where  $f$  and  $g$

are point-functions and  $C$  is a continuum irreducible between two points  $A$  and  $B$ . The following question is studied in detail: given a point-function  $U$ , under what conditions upon  $C$  will the above integral exist for every continuous point-function  $f$ ? A number of applications to the usual curvilinear integrals and extensions to surface integrals are then considered. Recent important investigations by Banach, Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, Fundam. Math. **7**, 225—236 (1925) and by Schauder, The theory of surface measure, Fundam. Math. **8**, 1—48 (1926) are extended in an interesting way and appear in a new light. *Tibor Radó* (Columbus).

**Malchair, Henri:** Sur un théorème de M. Kempisty. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **3**, 99—101 (1934).

Ein direkter Beweis (ohne Zuhilfenahme der Klassifikation von Young) der sich auf Limeszahlen  $\alpha$  beziehenden Hälfte des für sämtliche Ordnungszahlen  $\alpha$  geltenden Satzes [Kempisty, Fundam. Math. **2**, 64—73 (1921)], daß eine Funktion von der Baireschen Klasse  $\alpha$  höchstens von der Klasse  $\alpha + 1$  der Sierpińskischen Klassifikation ist (in der letzteren erfolgt nämlich der Übergang zur höheren Klasse durch absolute Konvergenz der Funktionenreihe). *B. Knaster* (Warszawa).

**Malchair, Henri:** Quelques remarques sur les anneaux de fonctions. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **3**, 101—103 (1934).

Zwei Bemerkungen: 1. Es gibt Funktionenringe  $\Phi$ , für welche die Funktionenmenge  $\Phi_g - \Phi$  (vgl. dies. Zbl. **7**, 153) nicht leer ist; beispielsweise ist die Gesamtheit der reellen Funktionen von den Klassen  $\leq \alpha$  von Baire ( $\alpha$  beliebig festgesetzt) ein solcher Funktionenring  $\Phi$ . 2. Präzisierte Formulierung eines Ergebnisses aus Mém. Soc. Roy. Sci. Liège **19**. *B. Knaster* (Warszawa).

## Analysis.

### Reihen:

**Mordoukhay-Boltovskoy, D.:** Sur les limites des sommes. Œuvres sci. Univ. État, Rostoff sur Don **1**, 99—110 u. franz. Zusammenfassung 110 (1934) [Russisch].

The author discusses the principle of equivalent infinitesimals in evaluating limits of certain sums, i. e. the relation

$$(1) \quad \lim \sum \alpha_j = \lim \sum \beta_j, \quad (\alpha_j, \beta_j - \text{infinitesimals})$$



where  $\frac{\alpha_j}{\beta_j} \rightarrow 1$  (uniformly — a notion made use of, but not explicitly stated. Ref.). He further discusses the case where not all  $\beta_j$  are equivalent to the corresponding  $\alpha_j$ , also the existence of  $\lim \sum A_j \alpha_j$  (assuming that  $\lim \sum \alpha_j$  exists) and the validity of  $\lim \sum A_j \alpha_j = \lim \sum B_j \beta_j$  ( $A_j, B_j$  — given factors). — The results obtained are finally expressed in terms of definite integrals. *J. Shohat* (Philadelphia).

**Cinquini, Silvio:** Sopra i polinomi trigonometrici di Fejér. *Rend. Semin. mat. Univ. Padova* **4**, 155—175 (1933).

The author derives some well known properties of Fejér's partial sums of the Fourier series of an integrable function  $f(x)$ . Analogous properties are derived also in the case of the double Fourier series. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Cesari, Lamberto:** Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier. *Boll. Un. Mat. Ital.* **13**, 100—104 (1934).

Let  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  be an arbitrary sequence of constants, real or complex,  $\alpha_0 \neq 0$ . Let the sequence  $\gamma_0, \gamma_1, \dots$  be determined by  $\alpha_0 \gamma_0 = 1$ ,  $\alpha_0 \gamma_n + \dots + \alpha_n \gamma_0 = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . The author proves the following result: Assume that (I) the series

$$Da_n = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t a_{n+t}, \quad a_n^* = \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t Da_{n+t}, \quad n = 0, 1, \dots$$

converge and  $a_n = a^*$ . (II) On setting  $\theta(x; n, p) = \frac{1}{2} \gamma_n + \sum_{t=1}^p \gamma_{n-t} \cos tx$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,

$0 \leq p \leq n$  there exists a sequence of positive constants  $\mu_0, \mu_1, \dots$  and a non-negative function  $\psi(x)$  which is finite except at a finite number of points and is bounded in any interval not containing these points, the constants  $\mu_n$  and the function  $\psi(x)$  being such that

$$|\theta(x; n, p)| \leq \mu_n \psi(x), \quad \sum_0^{\infty} |Da_n| \mu_n < \infty.$$

(III) there exists a sequence  $\nu_0, \nu_1, \dots$  such that

$$\int_0^{2\pi} |\theta(x; n, p)| dx < \nu_n, \quad \sum_0^{\infty} |Da_n| \nu_n < \infty.$$

Then  $\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos nx$  is a Fourier series, analogous result being true of  $\sum_1^{\infty} a_n \sin nx$ .

This result includes as special cases results several authors, such as Szidon, Kolmogoroff, C. N. Moore, and the author of the present article himself. *J. D. Tamarkin*.

**Cesari, Lamberto:** Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **3**, 105—134 (1934).

The author discusses the generalized differences of a sequence  $\{a_n\}$  and applies them for derivation of sufficient conditions that a given sequence be a sequence of Fourier coefficients. We state the following results of the author using the notation

$$\Delta^\sigma a_n = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma}{t} a_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(I) If  $a_n \rightarrow 0$ ,  $0 < \sigma < 1$ , and (\*)  $\sum |\Delta^\sigma a_n|$  converges then  $\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos nx$  is a

Fourier series. The same holds true if  $a_0 = 0$  and  $\cos nx$  is replaced by  $\sin nx$ . (II) The result of (I) holds if  $\sigma > 1$ , provided that (\*) is replaced by  $\sum |\Delta^\sigma a_n| n^{\sigma-1}$ . (III) If  $a_n \rightarrow 0$ ,  $\sigma > 1$ , and  $\sum |\Delta^\sigma a_n| n^{\sigma-1} \lg n$  converges then  $\sum a_n \sin nx$  is a Fourier series.

The author observes that result (I) overlaps with a known result of Szidon, while (II) is a generalization of a theorem of Kolmogoroff. It should be added that (II) was proved independently in a recent note by C. N. Moore [*Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **19**, 846—848 (1933); this *Zbl.* **7**, 345]. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Hardy, G. H.:** On the summability of series by Borel's and Mittag-Leffler's methods. *J. London Math. Soc.* **9**, 153—157 (1934).

Le procédé de sommation de Mittag-Leffler ( $B, \lambda$ )



$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \sim \lim_{T=\infty} \int_0^T e^{-t} \cdot A_\alpha(t) \cdot dt$$

$$A_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (1)$$

depend du paramètre  $\alpha$  et la puissance de ce procédé croît avec  $\alpha$ . Le théorème de M. Hardy permet de conclure inversement la sommabilité  $(B, \alpha)$  d'une série sommable  $(B, \beta)$  avec  $\alpha < \beta$  sous la condition que la fonction  $A_\alpha(t)$  définie par (1) est la somme d'une série (1) convergente pour toute valeur de  $t$ . La preuve donnée par l'auteur est explicitée dans le cas particulier où  $\alpha = \beta/2$  et n'est qu'indiquée dans le cas général.

*E. Kogbeliantz* (Téhéran).

**Wang, Fu Traing:** Cesàro summation of the derived Fourier series. Tôhoku Math. J. 39, 107—110 (1934).

The author establishes a few theorems on the Cesàro summability of Fourier series differentiated term by term. In particular the following theorem is proved: Let  $f(x)$  be integrable over  $(0, 2\pi)$  and periodic, and let the function

$$g(t) = g_x(t) = [f(x+t) - f(x-t)]/2t$$

be integrable in the sense of Lebesgue in the neighbourhood of the point  $t = 0$ . Then the Fourier series of  $f(x)$  is summable  $(C, k)$ ,  $k \geq 1$  at the point  $x$  if and only if the Fourier series of  $g(t)$  is summable  $(C, k-1)$  at the point  $t = 0$ . The sum in both cases is the same. See also a note of the referee in *Studia Math.* 3 (this Zbl. 3, 253).

*A. Zygmund* (Wilno).

**Broggi, U.:** Su di un'applicazione del metodo di sommazione di Borel. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 378—382 (1934).

This note contains certain remarks on Borel summability and on the "generalized Euler method" of summability [see this Zbl. 9, 64]. *C. R. Adams* (Providence).

**Sunouchi, Gen-ichirô:** On a linear transformation of infinite sequences. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 161—163 (1934).

Démonstration d'une proposition concernant l'inversion du théorème connu de Toeplitz sur les transformations linéaires de suites [v. aussi R. Agnew, Tôhoku Math. J. 35, 244—252 (1922)].

*F. Leja* (Warszawa).

## Differentialgleichungen:

**Petrovitch, Michel:** Équations différentielles en rapport avec les nombres premiers. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3, 103—108 (1934).

Beispiele für Funktionen, die algebraischen Differentialgleichungen genügen und die in einem Intervall  $0 < x < M$  eine der folgenden Eigenschaften haben: (1) Für ganzes  $n$  ist  $F(n)$  rational, und zwar nur dann ganz, wenn  $n$  eine ungerade Primzahl ist. (2)  $F(n)$  ist regulär,  $F(n) = 0$ , wenn  $n$  eine Primzahl,  $F(n) \neq 0$  sonst. — Für  $M = \infty$  sind keine solchen Funktionen bekannt.

*Willy Feller* (Kopenhagen).

**Paradiso, L. J., and R. H. Cameron:** A method of solving the linear differential equation with constant coefficients. Amer. Math. Monthly 41, 296—299 (1934).

Die Differentialgleichung  $F(D)y = f(x)$  mit  $D = \frac{d}{dx}$  und

$$F(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

$a_i$  konstant) wird im Reellen gelöst durch Zerlegung von  $F(D)$  in Faktoren  $D - \alpha$  und  $(D - \alpha)^2 + \beta^2$ ; dabei wird  $(D - \alpha)^2 + \beta^2$  weiter in (reelle) Linearfaktoren zerpalten nach der Formel  $(D - \alpha)^2 + \beta^2 = (D - \alpha - \beta \operatorname{tg} \beta x)(D - \alpha + \beta \operatorname{tg} \beta x)$ .

*Rellich* (Göttingen).

**Thomas, J. M.:** An existence theorem for generalized pfaffian systems. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 309—315 (1934).

Jedes Gleichungssystem  $S$  von der Form  $\omega^1 = \dots = \omega^m = 0$ , wo  $\omega^\lambda$  ( $\lambda = 1, \dots, m$ ) eine symbolische Differentialform vom Grade  $(0 <) p_\lambda (\leq n)$  in den Veränderlichen



$x^1, \dots, x^n$ , mit analytischen Koeffizienten, bedeutet, wird verallgemeinertes Pfaffsches System genannt. Eine analytische Mannigfaltigkeit  $x^i = f^i(u^1, \dots, u^k)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), wird ein Integral von  $S$  genannt, wenn auf derselben das System  $S$  identisch befriedigt wird. Der Verf. betrachtet nur (im gewissen Sinne) nicht-singuläre (n. s.) Integrale von  $S$  und bestimmt eine obere Grenze  $\gamma$  für ihre Dimension. Ist  $k \leq \gamma$ , so gibt es wenigstens ein  $k$ -dimensionales n. s. Integral  $V_k$  von  $S$ . Ist  $k < \gamma$ , so geht durch jedes n. s. Integral  $V_k$  wenigstens ein n. s. Integral  $V_{k+1}$ .

O. Borůvka (Brno).

**Thomas, J. M.:** The condition for a pfaffian system in involution. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 316—320 (1934).

Ist  $S$  ein verallgemeinertes Pfaffsches System (s. das vorangehende Referat) in den Veränderlichen  $x^1, \dots, x^n$ , so gibt es, unter gewissen Bedingungen, nicht-singuläre Integrale von  $S$ , auf denen  $k$  ausgezeichnete Veränderliche  $x^{i_1}, \dots, x^{i_k}$  unabhängig sind. Eine solche notwendige und hinreichende Bedingung wird in der vorliegenden Arbeit abgeleitet.

O. Borůvka (Brno).

**Levi-Civita, T.:** Sulle soluzioni stazionarie dei sistemi pfaffiani. II. Il caso più significativo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 369—375 (1934).

This is a continuation of another paper with the same title (this Zbl. **9**, 67). The lower limit to the dimension of the subvariety in question, previously given as unity, is now replaced by  $1 + m$ , where  $m$  is the number of equations defining the variety  $\Sigma$ . It is assumed that at least one of a certain set of polynomials in the given functions and their derivatives is not zero.

J. M. Thomas (Durham).

**Smith, T.:** Change of variables in Laplace's and other second-order differential equations. Proc. Physic. Soc., London **46**, 344—349 (1934).

A partial differential equation when written in matrix form

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Theta \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \Phi = \Psi,$$

where  $\Theta$  is a square matrix with elements which are either constants or functions of  $x, y, z$  may be readily transformed by using the abbreviated expressions

$$\Delta \Theta \Delta' \Phi = \Psi,$$

$$J D J^{-1} j \Theta j' D' \Phi = \Psi'$$

for the equation before and after the transformation.  $J$  denotes the Jacobian of the transformation,  $j$  the corresponding matrix,  $j'$  the conjugate matrix (formed by interchanging rows and columns).  $\Delta, \Delta'$  denote respectively the horizontal and vertical operators of the original matrix form, while  $D, D'$  denote the corresponding linear matrices in the new variables. When an equation involves partial derivatives of different orders use is made of a dummy unit variable so that the equation can be expressed in the matrix form. When the equation has constant coefficients more than one matrix form is possible.

H. Bateman (Pasadena).

**Donder, Th. de:** Système adjoint d'un système linéaire aux dérivées partielles à plusieurs fonctions inconnues. I. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **20**, 262—267 (1934).

Es sei  $S$

$$F_k(U) \equiv \sum_{\alpha=1}^m \left( \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha k}^{\beta} U_{\beta}^{\alpha} + B_{\alpha k} U^{\alpha} \right) = D_k \quad (k = 1, \dots, m; U_{\beta}^{\alpha} = \partial U^{\alpha} / \partial x^{\beta})$$

ein System von  $m (\geq 1)$  partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit  $m$  unbekannten Funktionen  $U^{\alpha}$  und  $n$  unabhängigen Veränderlichen  $x^{\beta}$ . Das System  $\bar{S}$ :

$$G_k(V) \equiv \sum_{\alpha=1}^m \left( - \sum_{\beta=1}^n \partial (A_{\alpha k}^{\beta} V^{\alpha}) / \partial x^{\beta} + B_{\alpha k} V^{\alpha} \right) = 0$$



wird adjungiert zu  $S$  genannt. Es werden einige Beziehungen zwischen  $S$  und  $S$  abgeleitet; z. B.: Für die mit Lösungen  $U^\alpha$ ,  $V^\beta$  von  $F_k(U) = 0$  bzw.  $S$  gebildeten Funktionen  $I^j = \sum_{\alpha, \beta=1}^m A_{\alpha\beta}^j U^\alpha V^\beta$  ( $j = 1, \dots, n$ ) gilt die Beziehung  $\sum_{j=1}^n \partial I^j / \partial x^j = 0$ .

O. Borůvka (Brno).

**Hoborski, A.:** Über vollständige Systeme partieller Differentialgleichungen. *Prace mat. fiz.* **41**, 55—63 (1934).

Zorawski [*Prace mat. fiz.* **3** (1892)] has defined the system  $X_i f = 0$  ( $i = 1, \dots, q$ ) as integrable in the direction  $(1, \dots, q)$  if  $(X_i, X_j) = \omega_{ij}^\alpha X_\alpha$  with  $\omega_{ji}^\alpha = 0$  whenever  $\alpha \geq i$  and  $\alpha \geq j$  simultaneously. The present author modifies the definition by strengthening the inequalities to  $\alpha > i$  and  $\alpha > j$ . He proves that every complete system can be given this form. Not only is this result implied by Zorawski's corresponding theorem, but the latter itself is an immediate corollary of the classic proposition that every complete system can be given jacobian form. *J. M. Thomas* (Durham).

**Rellich, Franz:** Über die Reduktion gewisser ausgearteter Systeme von partiellen Differentialgleichungen. *Math. Ann.* **109**, 714—745 (1934).

Das Ziel dieser Arbeit ist, Systeme von partiellen Differentialgleichungen, deren charakteristische Gleichung identisch verschwindet, so umzuformen, daß sie den Methoden des nicht ausgearteten Falles zugänglich werden. In der Hauptsache handelt es sich um ein System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung

$$A^i(x_\alpha^k, x_\beta^k, x^k, \alpha, \beta) = 0 \quad i, k = 1, 2, 3$$

für die drei Funktionen  $x^k(\alpha, \beta)$ , für welche die Determinante

$$\left| A_{x_\alpha^k}^i \varphi_\alpha + A_{x_\beta^k}^i \varphi_\beta \right| = 0$$

ist identisch in allen Argumenten einschließlich  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ . Es wird nun gezeigt, daß sich aus diesem System ein gleichwertiges, nicht ausgeartetes System 2. Ordnung ableiten läßt, das vom Monge-Ampèreschen Typus ist und wo die zweiten Abteilungen einer Funktion nur in je einer Gleichung auftreten. Dieses System besitzt nun zwei Scharen von Charakteristiken; es läßt sich somit elliptisch und hyperbolisch unterscheiden und die Sätze über den analytischen Charakter im ersten, über die Lösbarkeit des Anfangswertproblems im zweiten Falle sind anwendbar. — Als Anwendung wird die Aufgabe gelöst, alle Einbettungen einer zweidimensionalen Fläche mit vorgegebenem Linienelement in einen gegebenen dreidimensionalen Riemannschen Raum zu finden; dabei ergeben sich die genauen Analoga der Sätze von Darboux über Einbettung in den Euklidischen Raum.

K. Friedrichs (Braunschweig).

**Germa, R. J. H.:** Sur une extension des théorèmes de Lindelöf et de Poincaré à certaines équations aux dérivées partielles. *Mathesis* **47**, 344—350, 396—403 (1933); **48**, 64—70, 144—150 (1934).

Die Picardsche Methode der sukzessiven Approximationen in der von Lindelöf modifizierten Form wird auf die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung  $s = F(x, y, z, p, q)$  angewandt, um eine Lösung  $z(x, y)$  mit vorgeschriebenen Anfangsbedingungen zu bestimmen; dabei wird wie üblich vorausgesetzt, daß  $F$  eine Lipschitzsche Bedingung erfüllt, und die Konvergenz wird in einem hinreichend kleinen Gebiete bewiesen. Es wird dann nach dem Poincaréschen Gedankengange vorausgesetzt, daß  $F$  von einem Parameter  $\mu$  abhängt, daß nämlich, wenn  $z(x, y, \mu)$  die entsprechende Lösung bedeutet,  $F$  in einer Umgebung von  $\mu = 0$  eine Potenzreihenentwicklung nach  $u, z - z(x, y, 0), p - p(x, y, 0), q - q(x, y, 0)$  gestattet: dann hängt auch  $z(x, \mu)$  analytisch von  $\mu$  ab. Diese Ergebnisse werden endlich auf den Fall eines Systems  $s_k = F_k(x, y; z_1, \dots, z_m; p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_m)$  mit  $m$  unbekannten Funktionen  $z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)$  verallgemeinert.

G. Cimmino (Napoli).



**Sjöstrand, Olof:** Sur un problème aux limites pour les équations aux dérivées partielles du troisième ordre et du type hyperbolique. Ark. Mat. Astron. Fys. 24 A, Nr 18, 1—35 (1934).

L'auteur étudie l'équation

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - a \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = b \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e \frac{\partial z}{\partial x} + f \frac{\partial z}{\partial y} + gz + e$$

où les coefficients  $a, b, \dots, e$  sont des fonctions continues de  $x, y$  (avec ses dérivées premières) dans un domaine  $\Gamma$  entourant l'origine. Il cherche la solution continue dans  $\Gamma$  avec ses dérivées jusqu'au troisième ordre et qui se réduit à 0 sur trois courbes passant par l'origine et dont une est située dans chacun des trois angles des caractéristiques. — Ce problème est traité à l'aide de la méthode des approximations successives et on est forcé à résoudre une équation fonctionnelle à un nombre infini de termes contenant la fonction inconnue. — Après la résolution de ce problème l'auteur démontre que le cas analogue, mais dans lequel les trois courbes se coupent en trois points, est aussi résoluble. — Dans le cas le plus simple, où  $a = \text{const.}, b = \dots = g = 0$ , l'équation fonctionnelle ne contient qu'un nombre fini de termes. Janczewski (Leningrad).

**Sobrero, L.:** Applicazione degli ipercomplessi ai problemi di elasticità piana. III. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 479—483 (1934).

(Vgl. dies. Zbl. 8, 395.) Elastizitätstheoretische Interpretation der in den ersten Mitteilungen vorkommenden Differentialgleichungen sowie des Integralbegriffs u. ä. Eine ausführliche Darstellung soll folgen. Willy Feller (Kopenhagen).

**Mieghem, Jacques van:** Étude sur la théorie des ondes. XI. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 346—353 (1934).

Vervollständigung zu den Beweisen der ersten Mitteilung. (Vgl. dies. Zbl. 5, 207 und 293; Fortsetzungen: 7, 409; 8, 357 und 394). Willy Feller (Kopenhagen).

**Bouligand, Georges:** Sur un problème aux limites de la théorie du potentiel. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 291—295 (1934).

Soit  $D$  un domaine spatial borné, dont la frontière  $F$  est à courbure bornée. Soit  $F_\varepsilon$  l'ensemble des points dont la distance à  $F$  est égale à un nombre  $\varepsilon$  assez petit. On mène par chaque point  $A$  de  $F$  une droite non tangente à  $F$  en  $A$ , et qui coupe  $F_\varepsilon$  en un point  $A'$  infiniment voisin de  $A$  quand  $\varepsilon$  est infiniment petit. On donne  $\varepsilon$  et une fonction  $f(A)$ , et l'on cherche une fonction  $\varphi$ , harmonique dans  $D$  et telle que

$$\varphi(A') - \varphi(A) = AA' f(A).$$

Le problème se ramène à une équation de Fredholm, qui est soluble moyennant une condition de compatibilité; sous cette condition,  $\varphi$  est déterminé à une constante additive près (voir aussi ce Zbl. 8, 31 et 67). Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

**Kellogg, Oliver D.:** Converses of Gauss' theorem on the arithmetic mean. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 227—242 (1934).

1. Verallgemeinerung des Satzes von Koebe, wonach eine stetige Funktion, die in jedem Punkte  $P$  mit dem arithmetischen Mittel ihrer Werte auf einem beliebigen Kreise um  $P$  übereinstimmt, harmonisch ist. Die Ausführungen gelten für die Ebene und für den Raum. — Jedem Punkte  $P$  eines beschränkten Gebietes  $T$  werde ein ganz in  $T$  liegendes und  $P$  enthaltendes Gebiet  $C(P)$  zugeordnet, für das die klassische Randwertaufgabe der Potentialtheorie lösbar ist;  $t$  und  $c(P)$  seien die Begrenzungen von  $T$  bzw.  $C(P)$ , und  $\tau$  bezeichne die Menge der Punkte von  $t$ , die einem  $c(P)$  angehören. Es handelt sich um solche in  $T + t$  stetige Funktionen  $u(P)$ , die für jedes  $P$  mit derjenigen harmonischen Funktion übereinstimmen, die auf  $c(P)$  dieselben Randwerte annimmt. Eine solche Funktion kann in  $T$  Extremwerte besitzen. Sind aber die Gebiete  $C(P)$  zusammenhängend, und streben ihre Durchmesser bei jeder Annäherung an  $t$  gegen Null, so kann  $u$ , wenn es nicht konstant ist, nicht seine obere und seine untere Schranke in  $T$  annehmen. Setzt man noch voraus, daß  $u$  beschränkt ist und



bei jeder Annäherung an einen für die Randwertaufgabe regulären Punkt  $Q$  von  $t$  einem Randwert  $f(Q)$  zustrebt, wobei  $f(Q)$  stetig auf  $t$  ist, so ist  $u$  harmonisch. — 2. Erweiterung der Lebesgueschen Konstruktion der Lösung der verallgemeinerten Randwertaufgabe. Für die in  $T + t$  stetige Funktion  $U(P)$  bezeichne  $A\{U(P)\}$  den Wert in  $P$  derjenigen harmonischen Funktion, die auf  $c(P)$  mit  $U$  übereinstimmt. Die Gebiete  $C(P)$  mögen so beschaffen sein, daß  $A\{U(P)\}$  für alle  $U$  in  $T$  stetig ist, und  $\lim A\{U(P)\} = U(Q)$  gilt bei jeder Annäherung von  $P$  an einen Randpunkt  $Q$ . Diese Bedingungen sind z. B. erfüllt, wenn die  $c(P)$  Kreise sind, deren Radien stetig von  $P$  abhängen. Es sei nun  $u_0 = U$ , und allgemein  $u_n(P) = A\{u_{n-1}(P)\}$  für  $P$  aus  $T$ , und  $u_n(P) = u_{n-1}(P)$  für  $P$  aus  $t$ . Dann strebt  $u_n(P)$  gegen die Lösung der verallgemeinerten Randwertaufgabe der Potentialtheorie mit den Randwerten von  $U$  auf  $t$ , und zwar ist die Konvergenz in jedem abgeschlossenen Teilbereich von  $T$  gleichmäßig.

Willy Feller (Kopenhagen).

● Gunther, N. M.: La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique. (Coll. de monogr. sur la théorie des fonctions. Publiée par Émile Borel.) Paris: Gauthier-Villars 1934. 303 S. et 49 Fig. Frs. 70.—

The topics given major attention here are the properties of potentials of various spreads of acting matter and the boundary value problems of potential theory. The author is interested only in the three dimensional case. The boundary value problems are studied mostly by means of the theory of integral equations, knowledge of which is assumed. For these problems, the author assumes continuous boundary values and boundaries which, though smooth, are more general than those ordinarily considered in treatments of this type. The boundaries consist of  $1 \leq k < \infty$  closed surfaces  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , each of which satisfies the conditions imposed by Liapounoff in his memoir of 1898 (J. Math. p. appl. 4, s. 5, 241—311). These conditions are: (1) at each point of the surface there exists a tangent plane; (2) there exists numbers  $0 < E, 0 < \lambda \leq 1$  such that, if  $M, N$  are any two points of the surface, the angle  $\theta$  between the normals at  $M$  and  $N$  satisfies  $\theta < EMN^\lambda$ ; (3) there exists a number  $0 < d$  such that, if  $M$  is any point of the surface, no parallel to the normal at  $M$  cuts the surface at more than one point interior to the sphere of radius  $d$  about  $M$ . In regard to the orientation of these surfaces when  $1 < k$ , two cases are considered. Denoting by  $D_j$  the bounded domain (region plus boundary) whose boundary is  $S_j$ , these are: (J) no two of the domains  $D_j$  have a point in common; (E) no two of the domains  $D_1, D_2, \dots, D_{k-1}$  have a point in common and all lie strictly interior to  $D_k$ . In the ordinary case ( $k = 1$ ), and in (E) the interior problem refers to  $D_1 + \dots + D_k$ , in (J), to  $D_k - (D_1 - S_1) - \dots - (D_{k-1} - S_{k-1})$ . In each case the exterior problem refers to the set complementary with regard to all space. The volume consists of five chapters and an appendix in which certain theorems indicated in the main body of the work are demonstrated. There is no preface and but one reference. Chapter I deals with introductory material, such as lemmas on surfaces of the Liapounoff type and consequences of Green's theorem. Chapter II is concerned with potentials of simple, double, and volume distributions. The material on surface distributions consists essentially of proofs of theorems obtained or stated by Liapounoff, and a development of Korn's identities for differentiable densities. The results obtained on volume distributions are familiar. In Chapter III the author gives a detailed treatment of the interior and exterior Neumann problem for the cases mentioned above. In each case the Neumann problem is treated as a particular case of a single integral equation. Incidentally, it might be remarked, Green's theorem not being available, the author establishes Green's identities for potentials of simple distributions. Chapter IV contains a treatment of the interior and exterior Dirichlet problem for the above cases. Here again, each problem is treated as a particular case of a single integral equation. Chapter V is concerned with Green's functions and their applications. The Dirichlet problem is solved by means of the corresponding Green's function. The solution of the Neumann problem is given in terms of F. Neumann's function. The third boundary value problem is treated both in terms of integral equations and the corresponding Green's function. The last 36 pages are devoted to a study of the three boundary value problems for the equations  $\Delta U = L(x, y, z) U + K(x, y, z)$ ,  $0 < L$ , and  $\partial^2 U / \partial t^2 = a^2(\partial^2 U / \partial x^2 + \dots + \partial^2 U / \partial z^2) + \Phi(x, y, z)$ ,  $a$  constant. In conclusion it might be pointed out that while the analysis in general is very carefully made and considered, there are a few slips. These the reader can correct without difficulty. On p. 27, for example, the author requires, for a function to be harmonic in the interior of a domain, that it be uniformly continuous there, but on p. 42 he concludes that a function in question is harmonic in the interior of a domain simply because it satisfies Laplace's equation there. On p. 201 he deduces that Green's function for the interior Dirichlet problem has on the boundary of its region of definition a strictly negative "interior normal" derivative on the ground, roughly, that the function is positive in the interior of the domain and zero on the boundary.

Gergen.



**Spezielle Funktionen:**

**Cinquini, Silvio:** Su una proprietà dei polinomi di Stieltjes. *Rend. Circ. mat. Pisa* lermo 58, 57—72 (1934).

Let  $f(x, y)$  be integrable (Lebesgue) over the bounded open set  $D$ , and let  $\pi_n(x, y)$  be the polynomials of Stieltjes for  $f(x, y)$ . Then the author shows that

$$\iint_E \pi_n dx dy \rightarrow \iint_E f dx dy$$

for every measurable subset  $E$  of  $D$ , and that the integrals  $\iint_E \pi_n dx dy$  are "equally doubly-absolutely continuous". This extends to functions of two variables a previous theorem of Tonelli for functions of one variable [*Ann. Mat., Ser. III*, 25, 275 ff (1916)].

Graves (Chicago).

**Levine, B.:** Sur une généralisation du théorème de Hölder. *Œuvres sci. Univ. État, Rostoff sur Don* 1, 79—97 u. franz. Zusammenfassung 98 (1934) [Russisch].

Il s'agit de la généralisation du théorème connu que la solution de l'équation  $\Phi(x+1) = x\Phi(x)$ , c.-à-d. la fonction  $\Gamma(x)$ , est une fonction hypertranscendante — qui ne peut pas satisfaire à une équation différentielle algébrique. L'auteur démontre que l'équation  $\Phi[\alpha(x)] = B(x)\Phi(x)$  ( $\alpha(x)$  et  $B(x)$  fonctions rationnelles) ne peut avoir une solution hyperalgébrique (c.-à-d. satisfaisant à une équation différentielle algébrique) que s'il existe une fonction rationnelle  $w(x)$ -solution de l'équation  $w[\alpha(x)] = CB\delta(x)w(x)$  ( $\delta$  entier). Ainsi par ex. toutes les solutions de l'équation  $\Phi(x^n+1) = x^n\Phi(x)$  sont hypertranscendantes. Janczewski (Leningrad).

**Davies, O. L.:** On asymptotic formulae for the hypergeometric series. II. Hypergeometric series in which the fourth element,  $x$ , is not necessarily unity. *Biometrika* 26, 59—107 (1934).

In a previous paper (this Zbl. 8, 114) the author found approximations for the sum of a finite number of terms of the hypergeometric series with unit argument. In this paper the more general case when the argument is not unity is considered. Various methods are used, such as fitting modified forms of the Pearson system of frequency curves, and many numerical and graphical illustrations are given. As in the case of the previous paper the interest is mainly statistical. W. N. Bailey (Manchester).

**Heuser, Paul:** Über eine Transformation der Faberschen Polynomreihen. *Math. Z.* 38, 777—782 (1934).

Man bezeichne mit  $p_n(z)$  die zu einer geschlossenen analytischen Kurve  $C$  gehörigen „Faberschen Polynome“ [vgl. *J. f. Math.* 150, 79 ff. (1919)]. Die Abbildung  $z = \varphi(z^*)$  führe das Äußere von  $C$  in das Äußere einer ebensolchen Kurve  $C^*$  über, wobei der unendlichferne Punkt fest bleibt und das Linienelement darin keine Verzerrung erleidet. Die entsprechenden Faberschen Polynome seien mit  $p_n^*(z^*)$  bezeichnet. Verf. beweist

die folgende Invarianzeigenschaft der Entwicklung  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z)$  einer im abgeschlossenen Inneren von  $C$  regulären Funktion  $F(z)$  nach den genannten Polynomen. Die durch das Integral

$$F^*(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} \frac{F[\varphi(\zeta)]}{z^* - \zeta} d\zeta$$

definierte, im abgeschlossenen Inneren von  $C^*$  reguläre Funktion besitzt die Entwicklung  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n^*(z^*)$ . Szegő (Königsberg, Pr.).

**Gormley, P. G.:** A generalization of Neumann's formula for  $Q_n(z)$ . *J. London Math. Soc.* 9, 149—152 (1934).

After establishing the formula (for positive integral values of  $n - m + 1$ )

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{1/2} P_n^{-m}(t) \frac{dt}{z-t} = e^{im\pi} (z^2-1)^{1/2} Q_n^{-m}(z), \quad (R(m) > 1)$$

the author expands the integral in powers of  $\frac{1}{z}$  and so finds that the integral

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{1}{2}m} t^r P_n^{-m}(t) dt$$

is zero except when  $r - n + m$  is an even integer  $2s$ . It is shown that when  $m > 1$  and  $n - m + 1$  is a positive integer the functions  $Q_n^{-m}(z)$  and  $Q_n^m(z)$  have no zeros provided that a cross-cut is made along the real axis from 1 to  $-\infty$  to render the functions one-valued. — By using the reciprocal relation between the two types of Legendre function it is shown that when  $n + \frac{3}{2} > 0$  and  $n - m$  is a negative integer the function  $P_n^{-m}(z)$  has no zeros in the interval  $-1 < z < 1$ . Except, perhaps, for  $z = 0$ . When  $n + \frac{1}{2} > 0$  and  $n - m$  is a positive integer there are  $n - m$  zeros in this interval but if the function is defined over the whole plane with a cross-cut from 1 to  $-\infty$ , it has no zeros. When  $m > 0$  and  $n - m$  is a negative integer,  $Q_n^{-m}(z)$  has  $m - n - 1$  zeros lying on the imaginary axis of  $z$ .

H. Bateman (Pasadena).

**Hönl, H.:** Über ein Additionstheorem der Kugelfunktionen und seine Anwendung auf die Richtungsquantisierung der Atome. Z. Physik 89, 244–253 (1934).

Im Anschluß an die Arbeit von Güttinger (vgl. dies. Zbl. 3, 138) wird die Darstellung der dreidimensionalen reinen Drehgruppe elementar hergeleitet und als Verallgemeinerung des bekannten Additionstheorems der Kugelfunktionen gedeutet in der Form:

$$P_l^m(\cos \theta) e^{im\Phi} = \sum_{m'=-l}^{+l} C_{lm'}^{(l)} P_l^{m'}(\cos \theta') e^{im'\Phi'}.$$

Die  $C_{lm'}^{(l)}$  bilden im wesentlichen die Koeffizienten der Darstellung der Drehgruppe. — Physikalische Deutung: Ein Atomstrahl mit den Quantenzahlen  $m, l$ , der durch ein erstes Magnetfeld erhalten ist, wird in einem zweiten Feld aufgespalten in  $(2l+1)$  Strahlen mit Quantenzahlen  $m', l$ .

S. Flüge (Frankfurt a. M.).

**Dhar, S. C.:** On the expansion of Mathieu functions in a series of Bessel's functions. Philos. Mag., VII. s. 17, 1031–1038 (1934).

Mit Hilfe sukzessiver Approximationen werden Reihenentwicklungen Mathieuscher Funktionen nach Besselschen Funktionen erster Art aufgestellt, welche nicht wesentlich über die bekannten Darstellungen dieser Art (Erg. Math. 1, 3) hinausgehen.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Humbert, Pierre:** Nouvelles remarques sur les fonctions de Bessel du troisième ordre. Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncaei 87, 323–331 (1934).

Operational methods are used to obtain properties of "Bessel functions of the third order", defined by the relation

$$J_{m,n}(x) = \frac{(\frac{1}{2}x)^{m+n}}{m!n!} {}_0F_2\left(m+1, n+1; -\frac{x^2}{27}\right).$$

Examples of the formulae obtained are

$$-\frac{m+n}{x} J_{m,n}(x) + J'_{m,n}(x) = -J_{m+1,n+1}(x),$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+2n)(m+n-1)!}{n!} J_{n,m+2n}(x),$$

$$x^2 J_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(3x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-s^2/16x^2} \operatorname{ber}(2\sqrt{s}) ds.$$

W. N. Bailey (Manchester).

**Mehrotra, Brij Mohan:** Some definite integrals involving self-reciprocal functions. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 265–266 (1934).

Two theorems are given, one of which states that, if

$$\varphi_{\omega}(t) = \omega^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega^2 x^2} f(x) \cos t\omega x dx,$$



where  $f(x)$  is self-reciprocal in the Fourier cosine transform and is such that  $\int_0^\infty |f(x)| dx$  converges, then

$$\varphi_\omega(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \varphi_{1/\omega}(it).$$

The other theorem gives a similar result when  $f(x)$  is self-reciprocal in the Fourier sine transform. The first theorem should be compared with J. London Math. Soc. 7, 82—87; § 4 (1932) [this Zbl. 4, 250 (Bailey)].

W. N. Bailey (Manchester).

### Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

**Barba, G.:** Alcune osservazioni sui nuclei di Andreoli e di Evans. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 386 (1934).

In einer früheren gleichbetitelten Mitteilung des Verf. sollen die Integrale nicht von 0 bis  $\infty$  sondern von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstreckt sein; so waren die entsprechenden Resultate nur scheinbar fehlerhaft (vgl. dies. Zbl. 7, 248). G. Cimmino (Napoli).

**Monteiro, Antonio:** Sur les noyaux additifs dans la théorie des équations intégrales de Fredholm. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1737—1739 (1934).

Defining the kernels  $H$  and  $L$  of a linear integral equation as additive if

$$K^{(n)} = H^{(n)} + L^{(n)},$$

for every positive  $n$ ,  $K^{(n)}$  being the  $n$ -th iterated of  $K = H + L$ , the author announces results of the following type: additivity of  $H$  and  $L$  is equivalent to the conditions  $\int H L + \int L H = 0$ ,  $\iint H L H + \iint L H L = 0$ , or to the condition that the reciprocal of  $H + L$  is the sum of the reciprocals of  $H$  and  $L$ ; that if  $H$  and  $L$  are additive, then  $H^{(i)}$  and  $L^{(j)}$  are orthogonal if  $i + j \geq 4$ , and that a solution  $X$  of the homogeneous equation  $X + \lambda \int (H + L) X = 0$  is a solution of one and only one of the equations  $X + \lambda \int H X = 0$  or  $X + \lambda \int L X = 0$ .

Hildebrandt (Ann Arbor).

**Mordoukhay-Boltovskoy, D.:** Sur l'inversion des intégrales définies au moyen de la théorie des résidus. Œuvres sci. Univ. État, Rostoff sur Don 1, 111—118 (1934) [Russisch].

A formal treatment (analogous to Heaviside's Operational Calculus) is given of the integral equation

$$(1) \quad \int_a^b \sum_{j=1}^q e^{\omega(z)} \vartheta_j(x) z^{\alpha_j} F_j[\omega(z), x] \varphi(z) dz = f(x),$$

( $\omega, \vartheta_j, F_j, f$  are given,  $F_j$  — polynomial in  $\omega$ ,  $\alpha_j$  are given constants), leading to the expression of the unknown function  $\varphi(z)$  as a line-integral. The fundamental assumption is made that

$$(2) \quad \int_a^b e^{\theta_j(x) - u} \omega(z) dz = \text{known finite expression } \sigma_j(x, u),$$

and that it is permissible to differentiate (2) repeatedly with respect to  $x$  (ordinary or fractional differentiation is used, according as  $\alpha_j = 0$  or  $> 0$ ). The latter operation is followed by multiplying both sides by a suitably chosen function  $\theta(u)$  and integrating along a proper contour. We then interchange the order of integration and identify the relation thus obtained with (1), which yields the desired expression for the solution  $\varphi(z)$ . A concrete example serves as an illustration. J. Shohat (Philadelphia).

**Bochner, S.:** Inversion formulae and unitary transformations. Ann. of Math., II. s. 35, 111—115 (1934).

This note contains an unexpectedly simple derivation of the most general expression of a unitary transformation of the space  $L_2(0, \infty)$ . Let  $k(x, y)$ ,  $l(x, y)$  designate functions which belong to  $L_2$  for each fixed  $x$ . The main theorem of the author is: Every unitary transformation of the space  $L_2(0, \infty)$  is representable in the form

$$(*) \quad \int_0^x g(\xi) d\xi = \int_0^\infty \overline{k(x, y)} f(y) dy, \quad \int_0^x f(\xi) d\xi = \int_0^\infty \overline{l(x, y)} g(y) dy, \quad g = Uf, \quad f = U^{-1}g,$$

where, for all  $a, b > 0$ ,  $\int_0^a k(a, y) \overline{k(b, y)} dy = \int_0^a l(a, y) \overline{l(b, y)} dy = \min(a, b)$ ;  
 $\int_0^b l(b, y) dy = \int_0^b \overline{k(a, y)} dy$ . Conversely, (\*) is a unitary transformation if these three conditions are satisfied. The author proves also that in order that a linear transformation

$T$  whose domain is  $L_2(0, \infty)$  be representable by a formula  $\int_0^x g(\xi) d\xi = \int_0^\infty \overline{k(x, y)} f(y) dy$ ,

it is necessary and sufficient that  $T$  and its adjoint  $T^*$  be defined everywhere and limited. These results include as special cases not only the theory of Plancherel transforms, but also the recent theory of Watson transforms as developed in the recent papers by Watson, Titchmarsh, and Plancherel. *J. D. Tamarkin* (Providence).

**Kaczmarz, S.: Note on general transforms.** *Studia Math.* **4**, 146—151 (1933).

In generalizing the results of recent investigations by Watson, Titchmarsh, and Plancherel the author proves that a necessary and sufficient conditions that there exist for every function  $f(x) \in L$  a pair of functions  $g(x)$  and  $h(x)$  such that

$$\int_0^x g(u) du = \int_0^\infty f(t) \varphi(x, t) dt, \quad \int_0^x f(u) du = \int_0^\infty g(t) \psi(x, t) dt, \quad (1)$$

$$\int_0^x h(u) du = \int_0^\infty f(t) \psi(x, t) dt, \quad \int_0^x f(u) du = \int_0^\infty h(t) \varphi(x, t) dt, \quad (2)$$

and

$$\int_0^\infty f^2 dt = \int_0^\infty g^2 dt = \int_0^\infty h^2 dt$$

are that

$$\int_0^\infty \varphi(x, t) \varphi(y, t) dt = \min(x, y), \quad \int_0^\infty \psi(x, t) \psi(y, t) dt = \min(x, y),$$

$$\int_0^y \varphi(z, t) dt = \int_0^t \psi(y, t) dt.$$

It should be observed that either (1) or (2) may be omitted from the statement of the theorem, and that the result of the author is slightly less general than that of a recent paper by Bochner [*Ann. of Math.* **35**, 111—115 (1934); see the prec. ref]. The argument of the author is essentially the same as that of Bochner, although the results are obtained independently. *Tamarkin* (Providence).

## Funktionentheorie :

**Karamata, J.: Weiterführung der N. Wiener'schen Methode.** *Math. Z.* **38**, 701—708 (1934).

Bekanntlich hat Fatou bewiesen, daß eine Potenzreihe um den Nullpunkt, deren Koeffizienten gegen 0 streben, und die im Punkte 1 regulär ist, dort konvergiert. Falls man nur Beschränktheit der Koeffizienten voraussetzt, ergibt sich nur die Beschränktheit der Partialsummen der Reihe. — M. Riesz hat diese Sätze auf Dirichlet'sche Reihen übertragen und gleichzeitig die Regularität durch eine schwächere Bedingung ersetzt. Verf. beweist den folgenden Satz: Es gibt zwei positive, beschränkte Funktionen  $m(x)$  und  $m_1(x)$  mit folgenden Eigenschaften:

$$m(x) = o(1) \text{ bei } x \rightarrow -\infty, \quad m_1(x) = o(1) \text{ bei } x \rightarrow +\infty.$$

Es sei  $|A(x)| \leq M$  für  $x \geq 0$ ,  $\limsup_{x \rightarrow \infty} |A(x)| = M_1$ ;

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-su} A(u) du \quad \text{für } \sigma > 0.$$

Wenn  $G(\sigma + ti) \rightarrow Q(t)$  für fast alle  $0 \leq |t| < 4\lambda$  bei  $\sigma \rightarrow 0$ ,

derart, daß  $\int_{-x}^x G(\sigma + ti) dt \rightarrow \int_{-x}^x Q(t) dt$  für  $0 \leq x \leq 4\lambda$  bei  $\sigma \rightarrow 0$



und daß

$$\frac{1}{\pi} \int_{-4\lambda}^{4\lambda} \frac{\sin \pi t}{t} Q(t) dt \rightarrow Q(0) \quad \text{bei } x \rightarrow \infty,$$

dann gilt für jedes reelle  $\delta$

$$\limsup_{x=\infty} \left| \int_0^x A(t) dt - Q(0) \right| \leq \frac{1}{\lambda} (Mm(\delta\lambda) + M_1 m_1(\delta\lambda)).$$

Dieser Satz enthält die beiden obengenannten Sätze und stellt überdies die Abhängigkeit der Abschätzung der Partialsumme von der Länge des „Regularitäts-Intervalls in Evidenz. Weitere Resultate werden angekündigt. *H. Heilbronn.*

**Obrechhoff, Nikola:** *Sur les polynomes univalents.* C. R. Acad. Sci., Paris 198, 2049—2050 (1934).

Das Polynom  $f(z)$  mit dem genauen Grade  $n$  habe die Nullstellen  $0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  ( $\alpha_\nu \neq 0$ ). Bezeichnet  $a$  die kleinste (positive) Nullstelle der Gleichung

$$\frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{z - |\alpha_\nu|} = 0,$$

so ist  $f(z)$  schlicht und sogar sternförmig in bezug auf den Nullpunkt in dem Kreise  $|z| \leq a$ . Weiter folgt ein analoger Satz für Polynome, die in geeigneten Kreisen jedem Wert  $p$  mal annehmen. Durch Grenzübergang können diese Sätze auf gewisse ganze Funktionen ausgedehnt werden. *Szegő (Königsberg, Pr.).*

**Heuser, Paul:** *Über Entwicklungen analytischer Funktionen nach gebietsabhängigen Polynomen.* Math. Ann. 110, 1—11 (1934).

Faber, Ref. und Carleman hatten Polynomsysteme definiert, die nur von einem gegebenen Bereiche abhängen, so beschaffen, daß jede in diesem Bereiche reguläre Funktion sich nach den Polynomen des fraglichen Polynomsystems entwickeln läßt. Dabei mußten über den Bereichrand gewisse Voraussetzungen gemacht werden. Verf. löst diese Frage für das allgemeinste Gebiet, das man auf das Innere eines Kreises schlicht abbilden kann, indem er  $f(z)^n, f(z) = w$  die Abbildungsfunktion,  $|w| < 1$ , geeignet durch Polynome approximiert,  $n = 0, 1, 2, \dots$  [Vgl. Popoff, Math. Ann. 89, 122 (1924); und Blumenthal, ebenda, 126.] Die Koeffizientenbestimmung gestaltet sich allerdings wesentlich komplizierter als bei den genannten Autoren. *Szegő.*

**Ringleb, Friedrich:** *Beiträge zur Funktionentheorie in hyperkomplexen Systemen. I.* Rend. Circ. mat. Palermo 57, 311—340 (1933).

Verf. definiert den Begriff der analytischen Funktion in einem hyperkomplexen System  $S$  über dem Körper  $P$  der reellen Zahlen und entwickelt die einfachsten Eigenschaften dieser Funktionen. Bilden die Elemente  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $S$  über  $P$ , so nennt er

$$y = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n \quad (1)$$

eine analytische Funktion der hyperkomplexen Veränderlichen

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \quad (2)$$

an der Stelle  $x^{(0)} = \sum_{s=1}^n \xi_s^{(0)} e_s$ , wenn zwei Bedingungen erfüllt sind: 1. Jedes  $\eta_s$  ist eine reelle analytische Funktion der reellen Veränderlichen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  an der Stelle  $\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}$ . 2. Das Differential  $dy = d\eta_1 e_1 + \dots + d\eta_n e_n$  läßt sich darstellen in der Form

$$dy = \sum_{i,k=1}^n \varphi_{ik} e_i dx_k, \quad \text{wo die } \varphi_{ik} \text{ reelle Funktionen von } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ sind. Bei Benutzung}$$

dieser Definition bestehen u. a. folgende Tatsachen. Damit eine Funktion (1), deren Komponente  $\eta_s$  beliebige reelle analytische Funktionen der  $\xi_s$  sind, eine analytische Funktion von (2) darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß die  $\eta_s$  einem System von linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen genügen, die man als Verallgemeinerung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen anzusprechen hat.

Die Anzahl der Differentialgleichungen dieses Systems ist gleich  $n^2 - r$ , wo  $r$  die Maximalzahl von Differentialen der Form  $e_i dx e_k$  bedeutet, die in bezug auf den Körper  $P$  linear unabhängig sind. Die Zahl  $r$  genügt dabei der Ungleichung  $n \leq r \leq n^2$ , und war tritt die Gleichung  $r = n^2$  dann und nur dann ein, wenn  $S$  eine volle Matrixalgebra oder das direkte Produkt einer solchen mit dem System der reellen Quaternionen ist. Jede analytische Funktion läßt sich in eine konvergente Potenzreihe nach der

hyperkomplexen Variablen  $x$  entwickeln, d. h. in eine Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu}$ , wo

$$\varphi_{\nu} = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu+1}} \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_{\nu+1}} e_{\lambda_1} x e_{\lambda_2} x \dots x e_{\lambda_{\nu+1}}$$

st und über alle Variationen  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu+1}$  zur  $(\nu + 1)$ -ten Klasse mit Wiederholungen summiert wird ( $\alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_{\nu+1}}$  reell). Umgekehrt stellt jede solche Reihe in ihrem Konvergenzgebiet eine analytische Funktion dar. Schließlich wird mit Hilfe der Strukturtheorie der halbeinfachen Systeme gezeigt, daß jede analytische Funktion in einem halbeinfachen System sich linear aus reellen und komplexen Funktionen von im allgemeinen mehreren reellen bzw. komplexen Veränderlichen zusammensetzt.

*F. K. Schmidt* (Göttingen).

**Ringleb, Friedrich:** Bemerkungen zur Arbeit des Verfassers: „Beiträge zur Funktionentheorie in hyperkomplexen Systemen. I.“ Rend. Circ. mat. Palermo 57, 476—477 (1933).

Berichtigung von Druckfehlern und Vereinfachung des Beweises eines Satzes aus der im Titel genannten Arbeit (vgl. vorst. Referat). *F. K. Schmidt* (Göttingen).

**Amante, Salvatore:** Risoluzione, nel campo delle matrici complesse, delle equazioni analitiche della forma  $f(X) = A$ . Rend. Circ. mat. Palermo 58, 73—92 (1934).

Let  $A_1$  be the Jordan normal form of  $A$ , and  $f(\lambda)$  a function analytic and regular in a region containing the characteristic roots  $\alpha_{\mu}$  of  $A$ . Necessary and sufficient conditions that a matrix  $C$  exist such that  $f(C)$  is similar to  $A$  are: (1) The  $\nu_{\mu}$  chains of  $A_1$  relative to  $\alpha_{\mu}$  must be separable into a number  $\lambda_{\mu}$  of sets in each of which the orders of the chains differ by 0 or 1; and if  $\gamma_{\mu s}$  is the number of chains in the  $s$ -th set, there must exist for every  $\mu$  and every  $s$  a root  $\varrho_{\mu s}$  of  $f(\lambda) = \alpha_{\mu}$  whose order of multiplicity is  $\nu_{\mu s} \geq \nu_{\mu s}$ . (2) If  $c_{\mu s}$  is the sum of the orders of the matrix chains of the  $s$ -th set,  $\nu_{\mu s}$  must equal  $\omega_{\mu s}$  for  $c_{\mu s} > \omega_{\mu s}$ , and equal  $c_{\mu s}$  for  $c_{\mu s} \leq \omega_{\mu s}$ . If  $Y^{-1}f(C)Y = A$ , then  $X = Y^{-1}CY$  satisfies  $f(X) = A$ . Conditions are found which are necessary and sufficient that  $C$  be expressible as a uniform analytic function of  $A$ . The case where  $f(\lambda)$  is a polynomial was treated by Rutherford [Proc. Edinburgh Math. Soc., II, 5, 135—143 (1932); this Zbl. 5, 150].

*MacDuffee* (Columbus).

**Spampinato, Nicolò:** Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad unità dotata di modulo. Rend. Circ. mat. Palermo 58, 105—143 (1934).

This is Part III of an earlier memoir [Rend. Circ. mat. Palermo 57, 235—272 (1933); this Zbl. 7, 290 (1933)]. If  $a$  is any number of the algebra and  $\varrho$  is a complex variable, the numbers  $\varrho a$  define the principal plane  $\pi$  of  $a$ . If  $a$  is not a divisor of 0, the right and left derivatives of  $f(z)$  at  $a$  are

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} [f(z) - f(a)](z - a)^{-1}, \quad f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^{-1}[f(z) - f(a)]$$

where  $z \rightarrow a$  along a path in  $\pi$ . This last restriction essentially reduces the theory to that of a function of a complex variable, and the usual theorems hold with slight modifications. Thus for  $f(z)$  defined over  $\pi$ ,  $z = \varrho a$ ,  $f(z) = F(\varrho)$ ,  $f'(z) = F'(\varrho) a^{-1}$ ,  $f(z) = a^{-1}F'(\varrho)$ . The Riemann integrals also are defined only for functions in the plane  $\pi$ , so that

$$\int f(z) dz = \left[ \int F(\varrho) d\varrho \right] a, \quad \int dz f(z) = a \int F(\varrho) d\varrho.$$

The usual theorems are shown to hold.

*MacDuffee* (Columbus).



# **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

**Mazurkiewicz, Stefan:** Sur les principes de la théorie de probabilité. C. R. Soc. Sci. Varsovie 26, 105—107 (1934) [Polnisch].

**Mazurkiewicz, S.:** Les moyennes translatives et la loi de Gauss. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 1/2, 1—8 (1934).

Beim Gaußschen Fehlergesetze ist die Wahrscheinlichkeit  $p(f_0, \lambda)$  einer Abweichung  $> \lambda$  zwischen dem arithmetischen Mittel

$$f_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$$

der Beobachtungswerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und dem „wahren Wert“  $x_0$  stets kleiner als die analoge Wahrscheinlichkeit hinsichtlich jedes anderen translativen (d. h. durch die Eigenschaft  $f(x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + a$  charakterisierter) Mittels. Dieser Satz kann dazu verwendet werden, um die Benutzung des arithmetischen Mittels unabhängig von der Theorie der Wahrscheinlichkeiten der Ursachen zu rechtfertigen.

*Bruno de Finetti* (Trieste).

**Baten, William Dowell:** Combining two probability functions. Ann. math. Statist. 5, 13—20 (1934).

By using the frequency function of a sum of  $n$  independent variates each distributed according to the function  $e^{-x}$ , the author evaluates certain finite summations. The second section discusses with figures a few of the peculiar forms assumed by the frequency functions of the sum of two independent variables with given distribution functions.

*Cecil C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

**Cochran, W. G.:** The distribution of quadratic forms in a normal system, with applications to the analysis of covariance. Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 178—191 (1934).

In this paper, proofs are given of some of important theorems about the distribution of any quadratic form  $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$  in the normally distributed variates  $x_1, x_2, \dots, x_r$ .

The following are some of these theorems: I. Every quadratic form  $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$  is distributed as is the linear form  $\sum_i \lambda_i^{1/2} z_i$  where the values of  $z_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) are independent and each follows the  $\chi^2$  distribution with one degree of freedom and the values of  $\lambda_i$  are the non-zero latent roots of the matrix  $\{a_{ij}\}$ . — II. If  $\sum_i x_i^2 = q_1 + q_2 + \dots + q_k$ , when

$q_1, q_2, \dots, q_k$  are quadratic forms in  $x_i$  with  $n_1, n_2, \dots, n_k$  degrees of freedom respectively, then a necessary and sufficient condition that  $q_1, q_2, \dots, q_k$  are independently distributed in accord with  $\chi^2$  distributions with  $n_1, n_2, \dots, n_k$  degrees of freedom respectively is given by

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

These theorems include as special cases certain theorems much used in the analysis of variance. — III. A necessary and sufficient condition that two quadratic forms  $\sum_{j,k} a_{jk} x_j x_k$  and  $\sum_{j,k} b_{jk} x_j x_k$  are independently distributed is

$$|1 - it_1 A - it_2 B| = |1 - it_1 A| |1 - it_2 B|$$

for all real values of real values of  $t_1$  and  $t_2$ , where  $i^2 = -1$  and  $A$  and  $B$  are the matrices  $\{a_{ij}\}$  and  $\{b_{ij}\}$  respectively. Applications are given to the analysis of covariance. These are concerned largely with problems of regression suggested by agricultural data.

*H. L. Rietz* (Iowa City).

**Walker, Helen M., and Vera Sanford:** The accuracy of computation with approximate numbers. Ann. math. Statist. 5, 1—12 (1934).

Besides deriving the usual rules, this paper contains a discussion of the proportion of cases in which the number of significant figures indicated by the rules is different from that actually obtained.

*C. C. Craig* (Ann Arbor, Michigan).

**Bartlett, M. S.:** The problem in statistics of testing several variances. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **30**, 164—169 (1934).

The use of two independent estimates of variance in studying the existence of significant differences between two samples of data is well known. The present paper deals with the extension of the problem to testing jointly the differences between variance in cases in which the data provide several independent estimates of variance. The same problem was attacked by Neyman and Pearson by means of a criterion based on the principle of maximum likelihood. The present paper suggests a possible alternate procedure that may prove of use when a relatively small number of samples, possibly unequal in size, is being used. The procedure is based on the independence of the ratios  $\frac{A}{B}$  and of  $\frac{C}{A+B}$ , where  $A$ ,  $B$ ,  $C$  are three independent sums of squares of a normal deviate  $x_1$  from its mean value. A discussion is also given of the extension of the problem to the case of two variates.

*H. L. Rietz (Iowa City).*

**Willers, Fr. A.:** Prüfung der Einheitlichkeit eines Massenfabrikates. *Z. angew. Math. Mech.* **14**, 77—84 (1934).

Given  $m$  series consisting of  $n_1, n_2, \dots, n_m$  objects respectively, ( $\sum_{j=1}^m n_j = N$ ), let each of the objects be measured with respect to some one characteristic. Then the variance of this measure for the total set of  $N$  objects is the sum of the weighted average of the variances of the separate series and the weighted variance of the means of the series. For a given variance of the whole set the relative magnitude of these two components furnishes a criterion for judging whether the lack of uniformity within or among the separate series is the more important factor. By dividing the weighted variance of the means by its expected value computed by rearranging the given set of measures in the  $m$  series in all possible ways the author derives a Lexis number the value of which compared to unity indicates a hypernormal or subnormal set of series of measures. To assist in judging the significance of the deviation of his Lexis number from unity the author computes its dispersion. He points out that his method is still applicable for suitably large samples chosen from the separate series. The theory is extended to the case in which two characteristics of each of the  $N$  objects is measured and an additional Lexis number based on the covariance of the two measures is derived and its dispersion is computed.

*C. C. Craig (Ann Arbor, Michigan).*

**D'Addario, R.:** Intorno alla validità dei due teoremi paretiani sulla dinamica distributiva. *Atti Ist. naz. Assicuraz.* **6**, 179—198 (1934).

Teilweise kritische Bemerkungen zum Paretoschen Einkommenverteilungsgesetz. Es werden im Anschluß an Pareto sowohl die Paretosche als auch eine vom Verf. vorgeschlagene verwandte Verteilung, die für kleine Einkommen mit dem empirischen Material sehr viel besser in Einklang steht, in bezug auf ihre Abhängigkeit von Parametern untersucht.

*W. Fenchel (Kopenhagen).*

**Berger, Alfred:** Studien zur Versicherungsmathematik. V. Zur Frage der Abhängigkeit der Versicherungswerte vom Rechnungszinsfuß. *Assekuranz-Jb.* **53**, 99—103 (1934).

Mit  ${}_tV_x$  sei die Reserve und mit  $\bar{P}_{x+t}$  die kontinuierlich zu entrichtende Nettoprämie bei einer Zinsintensität  $\delta$  bezeichnet; dieselben Größen bei einer anderen Zinsintensität  $\delta'$  seien mit  ${}_tV'_x$  bzw.  $\bar{P}'_{x+t}$  bezeichnet. Für eine sehr allgemeine Klasse von Versicherungskombinationen wird unmittelbar aus der Differentialgleichung der Nettoreserve u. a. die Beziehung hergeleitet:

$$\begin{aligned} {}_tV'_x - {}_tV_x &= \frac{1}{v' \cdot {}_tP_x} \left\{ (\delta' - \delta) \int_0^t v^s \cdot {}_sP_x \cdot {}_sV'_x ds + \int_0^t v^s \cdot {}_sP_x \cdot (\bar{P}'_{x+s} - \bar{P}_{x+s}) ds \right\} = \\ &= \frac{1}{v' \cdot {}_tP_x} \left\{ (\delta' - \delta) \int_0^t v^s \cdot {}_sP_x \cdot {}_sV_x ds + \int_0^t v^s \cdot {}_sP_x \cdot (\bar{P}'_{x+s} - \bar{P}_{x+s}) ds \right\}. \end{aligned} \quad (*)$$



Ist  $n$  die Versicherungsdauer, so folgt daraus

$$\int_0^n v^s \cdot {}_s p_x (\bar{P}'_{x+s} - \bar{P}_{x+s}) ds = (\delta - \delta') \int_0^n v^s \cdot {}_s p_x \cdot {}_s V'_x ds. \quad (**)$$

Aus (\*) sieht man, daß  ${}_t V'_x \equiv {}_t V_x$  dann und nur dann gilt, wenn  $(\delta' - \delta) {}_s V_x \equiv \bar{P}'_{x+s} - \bar{P}_{x+s}$  ist. Soll  $\bar{P}_{x+s}$  vom Zinsfuß unabhängig sein, so muß nach (\*\*)  $\int_0^n v^s \cdot {}_s p_x \cdot {}_s V_x ds = 0$  für jedes  $\delta$  gelten, also  ${}_s V_x \equiv 0$  sein, was nur bei natürlicher Prämienzahlung der Fall ist (vgl. dies. Zbl. 6, 360).

**Ziegel, Rudolf:** Über den Charakter der abgekürzten Todesfallversicherung. Bl. Versich.-Math. 2, 423—428 (1933).

**Freudenberg, Karl:** Ergänzungen betreffend den Charakter der abgekürzten Todesfallversicherung. Bl. Versich.-Math. 3, 110—112 (1934).

**Löer, Klemens:** Der Charakter der Todesfallversicherung. Bl. Versich.-Math. 3, 112—117 (1934).

**Timpe, A.:** Mathematik und Wirtschaftswissenschaften: Stoffübersicht. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 44, 1—4 (1934).

**Böhmer, P. E.:** Exakte Methoden der Wirtschaftsforschung im Vergleich mit denen der Physik. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 44, 4—6 (1934).

**Lorey, Wilhelm:** Finanzmathematik. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 44, 10—13 (1934).

**Boehm, F.:** Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungsmathematik. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 44, 13—20 (1934).

**Schneider, E.:** Fortschritte der ökonomischen Theorie in der Nachkriegszeit. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 44, 20—25 (1934).

## Geometrie.

● **Lagally, Max:** Vorlesungen über Vektor-Rechnung. 2. verb. Aufl. (Math. u. ihre Anwendungen in Monogr. u. Lehrbüchern. Bd. 2.) Leipzig: Akad. Verlagsges. 1934. XVII, 361 S. RM. 10.—.

**Servais, Cl.:** Sur la géométrie du tétraèdre. X. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 397—407 (1934).

**Godeaux, Lucien:** Sur les involutions du second ordre de l'espace. III. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 408—414 (1934).

**Dieudonné, J.:** Sur les faisceaux conjugués. Mathesis 48, 72—79 u. 168—179 (1934).

Fortsetzung von zwei früheren Arbeiten (dies. Zbl. 3, 67 und 4, 362). Insbesondere wird die Untersuchung der im Referat der zweiten Note genannten Kurve 4. Ordnung und ihrer Ausartungen weitergeführt.  
W. Fenchel (Kopenhagen).

**Papillon, Pierre:** Sur les surfaces polaires réciproques des conoïdes. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 25, 239—256 (1933).

**Obláth, Richard:** Zur Theorie der Konstruktionen dritten Grades. Tôhoku Math. J. 39, 1—5 (1934).

Ausführliche Darstellung des Inhalts einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 8, 77).

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Matsumura, Sôji:** Über Flächen und Kurven. II. Mem. Fac. Sci. Agricult. Taihoku Univ. 5, 207—245 (1933).

**Matsumura, Sôji:** Über Flächen und Kurven. III. Mem. Fac. Sci. Agricult. Taihoku Univ. 5, 287—301 (1933).

**Matsumura, Sôji: Über Flächen und Kurven. IV. Charakteristische Eigenschaften der Homothetie von Eiflächen.** Mem. Fac. Sci. Agricult. Taihoku Univ. 5, 369—372 (1933).

**Matsumura, Sôji: Über Flächen und Kurven. V. Über Minkowskis Stützfunktion.** Mem. Fac. Sci. Agricult. Taihoku Univ. 5, 373—377 (1933).

**Matsumura, Sôji: Über Flächen und Kurven. VI. Eiliniën und Eiflächen.** Mem. Fac. Sci. Agricult. Taihoku Univ. 10, 21—36 (1933).

Die Arbeiten bestehen wie die erste dieses Titels (vgl. dies. Zbl. 5, 309) aus zusammenhanglosen Einzelheiten, die zum Teil schon anderweitig publiziert sind (vgl. dies. Zbl. 5, 178; 6, 176, 221 sowie das zweite und dritte der folgenden Referate). Die übrigen behandeln metrische, affine und konforme Differentialgeometrie, Theorie der konvexen Flächen und Kennzeichnungen der Kugel, die in gewissen sehr wenig nahelegenden Relationen zwischen metrischen und affinen oder metrischen und konformen invarianten bestehen. Die meisten dieser Abschnitte knüpfen an andere Arbeiten des Verf. an (dies. Zbl. 5, 81, 179; 6, 22, 219, 221) und sind wegen mangelhafter Erklärung der Bezeichnungen nicht immer verständlich. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Matsumura, Sôji: Eine charakteristische Eigenschaft von Kreis und Kugel.** Tôhoku Math. J. 39, 22—24 (1934).

Es sei  $K$  ein konvexer Körper. Für jeden Punkt  $P$  von  $K$  sei  $V(P)$  das minimale Volumen, das von einer Ebene durch  $P$  von  $K$  abgeschnitten werden kann. Haben alle Punkte  $P$  mit Ausnahme eines einzigen,  $R$ , die Eigenschaft, daß es durch  $P$  nur eine Ebene gibt, die das Volumen  $V(P)$  abtrennt, so ist  $R$  Mittelpunkt von  $K$ . Um dies zu beweisen, wird gezeigt, daß jede Ebene durch  $R$  das Volumen von  $K$  halbiert. Dann folgt die Behauptung aus einem Satz von Funk [Math. Ann. 77, 129—135 (1926)]. Ferner wird aus einem Ergebnis von Kubota [Tôhoku Math. J. 17, 351 bis 362 (1920)] geschlossen: Hat  $K$  einen Mittelpunkt  $R$ , und haben alle ebenen Schnitte durch  $R$  denselben Flächeninhalt, so ist  $K$  eine Kugel. Durch Zusammenfassung der beiden Resultate erhält man eine Kennzeichnung der Kugel. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Matsumura, Sôji: Über Minkowskis Stützfunktion.** Tôhoku Math. J. 39, 25—27 (1934).

Nach Minkowski ist eine für alle reellen Wertsysteme  $u_1, \dots, u_n$  definierte reelle Funktion  $H(u_1, \dots, u_n)$  dann und nur dann die Stützfunktion eines konvexen Körpers des  $n$ -dimensionalen Raumes, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

- I.  $H(0, \dots, 0) = 0$ , II.  $H(tu_1, \dots, tu_n) = tH(u_1, \dots, u_n)$  für  $t > 0$ ,  
III.  $H(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \leq H(u_1, \dots, u_n) + H(v_1, \dots, v_n)$ .

Verf. zeigt, daß hierbei die Bedingung II durch die schwächere II': „ $H(tu_1, \dots, tu_n) \geq tH(u_1, \dots, u_n)$  für ein ganzes  $t > 1$ “ ersetzt werden kann, wenn noch die Forderung hinzugefügt wird, daß  $H$  in jedem beschränkten Bereich beschränkt ist.

*W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Matsumura, Sôji: Charakteristische Eigenschaften der Homothetie von Eiflächen.** Tôhoku Math. J. 39, 30—32 (1934).

Ist die mittlere Relativkrümmung eines konvexen Körpers konstant, so ist er eine Relativsphäre, d. h. zum Eickörper homothetisch. Dies kann nach Süss sehr elementar bewiesen werden (vgl. etwa Ergebn. Math. 3, H. 1, 117—118) und ist überdies bei Verwendung von Stützfunktionen als unmittelbare Folge des Hilbertschen Eindeutigkeitssatzes für elliptische Differentialgleichungen auf der Kugel zu erkennen (a. a. O. S. 116—117). Der Verf. führt den Satz unter Heranziehung der Ableitungsgleichungen der relativen Flächentheorie in anderer Weise auf den Hilbertschen zurück.

*W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Matsumura, Sôji: Weitere Kennzeichnungen der Kugel.** Tôhoku Math. J. 39, 33—35 (1934).

1. Es wird mit Hilfe Minkowskischer Ungleichungen gezeigt, daß die Kugel die einzige Eifläche ist, für die zwischen Stützfunktion  $H$ , Produkt  $p$  und Summe  $s$  der



Hauptkrümmungsradien eine Relation  $p = asH + b$  mit positiven Konstanten  $a$  und  $b$  besteht. — 2. Etwas vereinfachte Darstellung des Beweises des Verf. [Jber. Deutsch. Math.-Verein. **35**, 298—300 (1926)] für folgenden Satz: Die Kugel ist der einzige konvexe Körper konstanter Breite und konstanter Helligkeit. (Vgl. auch Ergebnisse Math. **3**, H. 1, 140—141.)

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Ganapathi, P.: On a certain class of ovals.** Math. Z. **38**, 687—690 (1934).

Eine ebene konvexe Kurve sei mit Masse belegt, deren Dichte der Kurvenkrümmung gleich ist. Als Krümmungsachse der Kurve wird nach Su [Sci. Rep. Tôhoku Univ. **17**, 35—42 (1928)] diejenige Gerade der Ebene bezeichnet, in bezug auf die das Trägheitsmoment dieser Massenverteilung minimal ist. Verf. betrachtet die Kurven, deren sämtliche Parallelkurven dieselbe Krümmungsachse haben. Zu ihnen gehören die Kurven konstanter Breite. Es wird gezeigt: Eine solche Kurve besitzt mindestens 6 Scheitel. Die Scheitel können nicht alle auf einem Kegelschnitt liegen. Jeder solchen Kurve lassen sich wenigstens 3 Quadrate umschreiben. Beim Beweis hiervon übersieht Verf. wie in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. **9**, 30), daß eine Nullstelle einer stetigen Funktion nicht notwendig mit Vorzeichenwechsel verbunden ist. Hier läßt sich jedoch der Beweis leicht vervollständigen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Ganapathi, P.: The isoperimetric deficit of a convex closed curve.** Math. Z. **38**, 691—694 (1934).

Wendet man eine von Bonnesen [Math. Ann. **91**, 252—268 (1924)] herrührende Abschätzung des isoperimetrischen Defizits auf den Vektorenbereich eines ebenen konvexen Bereichs  $C$  an, so erhält man

$$L^2 - 4\pi F \geq 8\pi F(M) + \pi(D - \Delta)^2.$$

Hierbei ist  $L$  die Randlänge,  $F$  der Flächeninhalt,  $D$  der Durchmesser,  $\Delta$  die Dicke von  $C$ .  $F(M)$  ist auf Grund einer bekannten Ungleichung für den Flächeninhalt des Vektorenbereichs nichtnegativ und läßt sich als Flächeninhalt der „Mediane“ deuten, das ist der Ort der Mittelpunkte der die Berührungspunkte von parallelen Stützgeraden verbindenden Sehnen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

### Algebraische Geometrie:

**Slade, Isabella Minto: On algebraic curves of pursuit.** Tôhoku Math. J. **39**, 111—113 (1934).

Untersuchung der projektiven Charaktere (Ordnung, Klasse, Singularitäten) der Verfolgungskurve einer geradlinigen Grundkurve, falls sie algebraisch ist.

E. G. Togliatti (Genova).

**Cattaneo, Paolo: Sulle cubiche piane ellittiche.** Esercit. Mat., II. s. **7**, 118 bis 128 (1934).

Verschiedene Fragen über ebene Kurven 3. Ordnung, insbesondere: „Diagonalevierecke“ der Kurve, d. h. Vierecke, deren Ecken und Diagonalepunkte auf der Kurve liegen; und „Wendepunktvierecke“, d. h. Vierecke, deren Ecken in vier Wendepunkten der Kurve fallen. Es gibt 54 solcher Wendepunktvierecke; sie haben je einen weiteren Wendepunkt als Diagonalepunkt; es folgt, daß die Kurven 3. Ordnung, die vier Wendepunkte in den vier Ecken eines gegebenen Vierecks haben, sich auf vier sisygetische Büschel verteilen. Die Beweise sind elementar analytisch oder auf die parametrische Darstellung der allgemeinen Kurve 3. Ordnung durch die Integrale 1. Gattung gestützt.

E. G. Togliatti (Genova).

**Duncan, D. C.: Symmetry, self-dual, rational plane curves of odd order.** Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 344—352 (1934).

Polare und kartesische Gleichungen einer besonderen rationalen autodualen ebenen Kurve der Ordnung  $2k + 1$ . Sie besitzt  $2k - 1$  Spitzen, die die Ecken eines regulären Polygons bilden,  $2k - 1$  Inflexionspunkte im Unendlichen,  $(k - 1)(2k - 1)$  Doppelpunkte, von denen  $2k - 1$  isolierte, usw.; sie wird von verschiedenen Homographieen und Korrelationen in sich überführt. Insbesondere die Fälle  $k = 2, 3, 4$ . Togliatti.

**Winger, R. M.:** Note on rational curves with trigonometric parameter. Amer. Math. Monthly **41**, 368—370 (1934).

**Vries, Jan de:** Eine Abbildung einer gewissen Kongruenz kubischer Raumkurven. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **37**, 201—203 (1934).

Verf. untersucht die Kongruenz der kubischen Raumkurven  $\varrho^3$ , welche durch die festen Punkte  $B_1, B_2, B_3, B_4$  gelegt werden und sich auf die durch  $B_1$  bzw.  $B_2$  gelegten Geraden  $c_1$  bzw.  $c_2$  stützen. Dies tut er mit Hilfe einer Abbildung der Kurven  $\varrho^3$  auf die Punkte einer vorgegebenen Bildebene  $E$ . Als Bild der  $\varrho^3$ , welche  $c_1$  in  $C'$ ,  $c_2$  in  $C''$  trifft, betrachtet er nämlich die Spur  $R$  der Geraden  $C' C''$  in  $E$ . Verf. untersucht die zusammengesetzten Kongruenzfiguren und die Systeme der Kurven  $\varrho^3$ , welche eine vorgegebene Gerade schneiden und eine vorgegebene Ebene berühren. *Schaake.*

**Wong, B. C.:** Enumerative properties of  $r$ -space curves. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 291—296 (1934).

In einem Raume  $S$ , sind  $n$  Geraden gegeben, die  $n - 1 + r$  Inzidenzen aufweisen. Aus solchen Geraden greift man  $q$  Gruppen von  $x_1 x_2 \dots x_q$  Geraden bzw., so daß jede Gruppe aus konsekutiv-inzidenten Geraden besteht, und zwei verschiedene Gruppen durch eine Kette von wenigstens  $s$  anderen konsekutiv-inzidenten Geraden voneinander getrennt werden. Verf. bildet eine Rekursionsformel zur Bestimmung der Anzahl jener Gruppen. Als Anwendung einige bekannte abzählende Formeln über algebraische Kurven.

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Gambier, Bertrand:** Tétraèdres conjugués à une quadrique  $\Sigma$  et à arêtes tangentes à une quadrique  $S$ . Tétraèdres dont les arêtes sont tangentes à deux quadriques  $S, S'$ . C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1896—1898 (1934).

Die Aufgabe, Tetraeder der ersten Art zu finden, ist von Vogt [Ann. École norm. (3) **12**, 363—389 (1895)] analytisch gelöst worden. Hier wird eine synthetische Lösung skizziert. Außerdem werden drei Sonderfälle berücksichtigt. — Die Aufgabe, Tetraeder der zweiten Art zu finden, wird auf die erste Aufgabe zurückgeführt. *E. A. Weiss.*

**Du Val, Patrick:** On regular surfaces in space of three dimensions, whose plane sections are of genus four. J. London Math. Soc. **9**, 105—112 (1934).

L. Roth hat sich mit den normalen singularitätenfreien Flächen der Hyperräume beschäftigt, deren Schnittkurven das Geschlecht 4 haben (s. dies. Zbl. **6**, 416). Verf. betrachtet hier die normalen und regulären Flächen des dreidimensionalen Raumes, deren ebene Schnittkurven das Geschlecht 4 haben. Die Ordnung einer solchen Fläche ist entweder 5 oder 6. Im ersten Falle hat  $F^5$  einen Doppelkegelschnitt oder zwei windschiefe Doppelgeraden. Im zweiten Falle hat  $F^6$  eine vierfache Gerade, oder zwei windschiefe dreifache Geraden, oder eine Doppelkurve 6. Ordnung mit dem Geschlecht 3, die zahlreiche Sonderfälle bieten kann, z. B. falls sie 1, 2, 3, 4 dreifache Punkte besitzt usw. (darunter die bekannte  $F^6$ , die die sechs Kanten eines Tetraeders als Doppelgeraden hat).

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Enriques, F.:** Sulle superficie ellittiche di genere zero. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 195—199 (1934).

A l'occasion de leçons faites au Séminaire mathématique de l'Université de Rome, l'Auteur revient sur la classification des surfaces algébriques de genres  $p_g = 0$ ,  $p_a = -1$  (voir son Mémoire des Rend. Circ. mat. Palermo **1905**), en utilisant les méthodes de la géométrie algébrique. Il considère les surfaces possédant deux faisceaux de courbes elliptiques  $C$  et  $K$  et distingue différents cas suivant que les courbes  $K$  sont de module général, harmoniques ou équi-harmoniques. Il obtient ainsi 7 familles de surfaces: deux du type „module général“ (déterminant = 2 et 4) deux du type „harmonique“ (déterminant = 4 et 8), et trois du type „équi-harmonique“ (déterminant = 3 et 6, type cyclique, et déterminant = 9).

*P. Dubreil (Nancy).*

**Longhi, Ambrogio:** Sopra le tangenti principali e i punti circolari delle superficie algebriche. Comment. math. helv. **6**, 284—316 (1934).

Le nombre d'ombilics que possède en général une surface  $F$  de l'espace ordinaire,



a été déterminé par A. Voss [Math. Ann. 9, 241 (1876)] et H. Schubert [Kalkül der abzählenden Geometrie, 244 (Leipzig 1879)]; des questions plus générales ont été résolues après par L. Berzolari, M. Pieri, L. Brusotti. Une extension ultérieure du problème est rejointe ici, à travers l'étude détaillée de la courbe lieu des points de contact des tangentes inflexionnelles de  $F$  qui appartiennent à un complexe de droites donné,  $\theta$ , et de la courbe lieu des points de  $F$  où les deux tangentes inflexionnelles relatives forment un groupe harmonique avec deux droites du complexe  $\theta$  (l'a. n'a pas remarqué que, en correspondance aux tangentes flecnodales de  $F$  qui appartiennent à  $\theta$ , la première des deux courbes indiquées admet généralement des points cuspidaux; ce qui infirme une partie des conclusions du travail). — On parvient ainsi à résoudre la question métrique susdite et d'autres encore, en supposant — comme cas particulier — que  $\theta$  se réduise au complexe quadratique des droites isotropes de l'espace. Quelqu'un des résultats obtenus ici, est déduit dans l'hypothèse que la surface  $F$  puisse avoir certaines singularités; de plus, on traite à part le cas spécial où  $F$  est une surface réglée.

Beniamino Segre (Bologna).

**Deaux, R.:** Sur la courbure des quadriques à centre. Mathesis 48, 97—102 (1934).  
Détermination sur une quadrique de la courbe pour laquelle

$$(R_1 + R_2)^m / (R_1 R_2)^n = C^{te}.$$

$R_1$  et  $R_2$  désignant les rayons de courbure principaux. Propriétés diverses.

P. Dubreil (Nancy).

**Eiesland, John:** The ruled  $V_4^4$  in  $S_5$  associated with a Schläfli hexad. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 315—326 (1934).

Im  $R_4$  ist der Ort aller Geraden, die vier vorgegebene Ebenen treffen, eine Segresche  $V_3^3$  mit 10 Doppelpunkten, welche auch noch eine fünfte, die zu den vier vorgegebenen Ebenen „asoziierte“ Ebene enthält. Im  $R_n$  werden die Geraden, die n vorgegebene  $R_{n-2}$  treffen, im allgemeinen keinen weiteren  $R_{n-2}$  schneiden. Sie erzeugen eine  $V_{n-1}^{n-1}$ , die in früheren Arbeiten des Verf. behandelt worden ist. (Vgl. dies. Zbl. 4, 367.) In dem Sonderfall aber, daß  $n + 1$  vorgegebene  $R_{n-2}$  sich in Schläflische Lage befindet, erzeugen die gemeinsamen Treffgeraden von  $n$  dieser  $R_{n-2}$  (die dann auch den  $(n + 1)$ ten  $R_{n-2}$  treffen) eine  $V_{n-1}^{n-1}$  mit  $n + 1$  Fundamental- $R_{n-2}$ . Diese Mannigfaltigkeit wird für den Fall der  $V_4^4$  des  $R_5$  in bezug auf ihre Singularitäten analytisch untersucht.

E. A. Weiss (Bonn).

**Godeaux, Lucien:** Sur quelques transformations birationnelles involutives associées à une cubique gauche. Amer. J. Math. 56, 214—218 (1934).

An involuntary Cremona transformation  $\theta$  between the bisecants of a space cubic curve and a polarity  $\Omega$  of the space determine an involutorial space Cremona transformation  $T$  in which the homologue  $T(P)$  of any point  $P$  is defined as the point in which the plane  $\Omega(P)$  meets the bisecant  $g' = \theta(g)$ , where  $g$  is the bisecant passing through  $P$ . Properties of  $T$ , concerning the fundamental loci and fixed points, are derived and exemplified in the special case in which  $\theta$  is quadratic.

Zariski (Baltimore).

**Linsman, M.:** Sur les transformations birationnelles de l'espace dépourvues de courbes fondamentales. II. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 222—233 (1934).

Etude de la transformation birationnelle déduite du système homaloïdal des surfaces cubiques ayant un point double, trois points simples et un contact du troisième ordre en un de ces points simples, dans les deux cas où les points bases du système homaloïdal sont tous distincts et où les deux points bases simples en lesquels les surfaces du système n'ont pas de contact sont remplacés par un point base simple et un contact en ce point avec une droite passant par ce point (I. voir ce Zbl. 8, 409).

**Villa, M.:** Sulle ipersuperficie iperalgebriche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 483—487 (1934).

Ici l'a. résume un Mémoire qui paraîtra prochainement ailleurs, concernant les variétés iperalgébriques de dimension (réelle)  $2r - 1$  d'un espace linéaire  $S_r$ , variétés

qu'il nomme ipersurfaces iperalgébriques. À une telle variété  $V_{2r-1}$ , d'après C. Segre [Math. Ann. 40, 440 (1892)], on associe un connexe involutif  $\Gamma$  entre les points de  $S_r$ , dont  $V_{2r-1}$  est le lieu des points unis. L'a. introduit aussi le système associé  $\Sigma$ , c'est-à-dire le système linéaire de dimension minima, auquel appartiennent les hypersurfaces hyperalgébriques qui correspondent par rapport à  $\Gamma$  aux différents points de  $S_r$ ; et l'antipolarité  $\Omega$  qu'on obtient dans  $\Sigma$  en associant à chacune de ses formes, le système linéaire de dimension minima qui contient celles qui correspondent à ses points. L'étude des relations mutuelles entre  $V_{2r-1}$ ,  $\Gamma$ ,  $\Sigma$ ,  $\Omega$ , permet de définir deux caractères de  $V_{2r-1}$ , invariants vis-à-vis des transformations rationnelles et antirationnelles; et de formuler une loi d'inertie intéressante, concernant les formes iperalgébriques réelles.

Beniamino Segre (Bologna).

**Wiman, A.:** Über den Zusammenhang von gewissen Mannigfaltigkeiten. Ark. Mat. Astron. Fys. 24 A, Nr 8, 1—10 (1933).

Die in dies. Zbl. 7, 173 dargestellten Ergebnisse des Verf. über den Zusammenhang der „Mannigfaltigkeiten vom geraden Typus“, deren Gleichungen in reellen homogenen Koordinaten die Gestalt

$$\sum_1^{\lambda} c_i^{1-n} |x_i|^n - \sum_{\lambda+1}^k c_i^{1-n} |x_i|^n = 0; \quad \sum_1^k x_i = 0$$

haben, gelten nur für  $n > 1$ . Für  $0 < n < 1$  sind die singulären Punkte einer solchen Mannigfaltigkeit durch

$$\begin{cases} x_i = c_i \text{ oder } 0 & \text{für } i = 1, 2, \dots, \lambda, \\ x_j = -c_j \text{ oder } 0 & \text{für } j = \lambda + 1, \dots, n, \\ \sum x_i + \sum x_j = \sum' c_i - \sum' c_j = 0 \end{cases}$$

gegeben. Ist  $\lambda_1$  die Anzahl der  $x_i \neq 0$ ,  $\lambda_2$  die der  $x_i = 0$  ( $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ ), weiter  $\mu_1$  die Zahl der  $x_j \neq 0$  und  $\mu_2$  die der  $x_j = 0$  ( $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ ), so hat man für

$$\lambda_2 = 0, \quad \mu_1 = 1 \quad (\text{a}) \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = 1, \quad \mu_2 = 0 \quad (\text{b})$$

einen isolierten singulären Punkt. Läßt man die  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \lambda$ ) von 0 an proportional anwachsen, so entstehen zunächst  $k - \lambda$  neue Teile aus isolierten singulären Punkten (a); sodann verschwinden  $\lambda$  Teile der Mannigfaltigkeit in singulären Punkten (b). In den weiteren Fällen

$$\lambda_2 = 0, \quad \mu_1 = 2 \quad \text{oder} \quad \lambda_2 = \mu_1 = 1, \quad (\text{c})$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \mu_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = \mu_2 = 1 \quad (\text{d})$$

werden bei Durchgang durch den singulären Punkt (c) zwei getrennte Teile verbunden bzw. bei (d) zwei Teile getrennt. Da für  $c_i = 0$  die Mannigfaltigkeit aus einem Teil  $c_{\lambda+1} = \dots = c_k = 0$  besteht (bzw. für  $\lambda = 1$  nullteilig ist), läßt sich durch stetige Änderung der  $c_i$  die Anzahl der Teile in jedem Stadium vollständig überblicken. Das wird an einigen Beispielen näher ausgeführt.

van der Waerden (Leipzig).

## Differentialgeometrie:

**Fenchel, W.:** Über einen Jacobischen Satz der Kurventheorie. Tôhoku Math. J. 39, 95—97 (1934).

Er lautet: Das Tangentenbild einer geschlossenen sphärischen glatten Kurve halbiert die Kugeloberfläche. Der Satz wird als Spezialfall des Satzes aufgewiesen: Das Integral der Windung einer geschlossenen Krümmungslinie über die Bogenlänge ist ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$ . Der letztgenannte Satz folgt aus derselben kurzen Rechnung, mit der man den bekannten Satz beweist: Schneiden sich zwei Flächen längs einer gemeinsamen Krümmungslinie, so ist der Schnittwinkel längs dieser Linie konstant.

Cohn-Vossen (Zürich).

**Nalbandian, J.:** Sur l'axe d'aberration d'une courbe gauche. Œuvres sci. Univ. d'État, Rostoff sur Don 1, 131—137 u. franz. Zusammenfassung 138 (1934) [Russisch].

Given a space curve and a point  $P$  on the curve, the planes parallel and very near



to a given plane  $\sigma$  on the tangent line at  $P$  meet the curve in two points  $M_1, M_2$  very near  $P$ . The locus of points which divide the segment  $M_1 M_2$  in a given ratio  $1:\lambda$  ( $\lambda \neq 1$ ) is a curve whose tangent at  $P$  coincides with the tangent to the given curve. If  $\lambda = 1$ , the locus is a "diametral" curve, and its tangent at  $P$  is the "axis of aberration". This tangent makes with the tangent to the given curve an angle  $\theta$  such that  $\tan \theta = \frac{3\tau}{\tau \varrho' + \omega \varrho}$ , where  $\varrho$  and  $\tau$  are the radius of curvature and the radius of torsion respectively and where  $\omega$  defines the position of the given plane  $\sigma$ . From this formula various consequences are derived, especially in the case  $\varrho = \text{const.}$  The author also defines another line ("line of inflection") as follows: The planes through the principal normal at  $P$ , very near to the osculating plane, meet the given curve in 2 points  $M_1, M_2$  very near  $P$ . The "line of inflection" is the tangent at  $P$  to the locus of midpoints of the segments  $M_1 M_2$ . This line makes with the tangent at  $P$  to the given curve an angle  $\theta$  such that  $\tan \theta = \frac{4\tau}{2\varrho'\tau + \varrho\tau'}$ . Also this formula is applied to some special cases.

O. Zariski (Baltimore).

**Baier, Othmar: Geometrischer Beweis des Satzes von Beltrami-Enneper über die Windung der Asymptotenlinien.** S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 1, 83—86 (1934).

Der Satz läßt sich leicht als Satz über das lineare Streckungsverhältnis einer Asymptotenlinie bei der sphärischen Abbildung aussprechen. In dieser Form läßt sich nur der Satz überraschend einfach in Evidenz setzen, wenn man auf der Fläche ein infinitesimales rechtwinkliges Dreieck  $D$  betrachtet, dessen Katheten Krümmungslinien und dessen Hypotenuse Asymptotenlinie ist. Das sphärische Bild  $D'$  von  $D$  ist natürlich wieder rechtwinklig, die Katheten sind denen von  $D$  parallel, die Hypotenusen sind orthogonal. Folglich sind  $D$  und  $D'$  einander ähnlich, wobei einander die Kathetenpaare gerade umgekehrt entsprechen, wie bei der sphärischen Abbildung selbst. Aus der Ähnlichkeit folgt: Quadrat des linearen Vergrößerungsverhältnisses gleich dem Flächenverhältnis. Das auf die Hypotenusen angewandt, gibt die Behauptung. Dieser ist Spezialfall eines Satzes über das Streckungsverhältnis längs konjugierter Richtungen in einem Punkt bei der sphärischen Abbildung; das Produkt dieser Streckungsgrößen ist gleich dem Absolutbetrag der Gaußschen Krümmung. Auch für diese allgemeinere Formel gibt Verf. einen Beweis mit derselben einfachen Methode. Man hat diesmal zwei infinitesimale rechtwinklige Dreiecke zu betrachten, die eine Kathete gemein haben. Katheten sind wieder Krümmungslinien, Hypotenusen die vorgegebenen konjugierten Linienelemente. Die Behauptung folgt dann aus dem bekannten Satz: Das sphärische Bild einer Richtung ist orthogonal zur konjugierten Richtung.

Cohn-Vossen (Zürich).

**Srinivasiengar, C. N.: Envelopes of systems of surfaces.** Tôhoku Math. J. 39, 82—94 (1934).

Um die Enveloppe einer Flächenschar  $f(x_1, x_2, x_3; a) = 0$  zu finden, eliminiert man in den meisten Fällen  $a$  aus den Gleichungen  $f_a = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ . Verf. untersucht vor allem den Fall (in dem jene Elimination versagen kann), daß eine der partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  eine Unendlichkeitsfläche hat. Solche Flächen bilden selbst Teile der Enveloppe, wenn man über die Art des Unendlichwerdens gewisse Zusatzvoraussetzungen macht. — Übertragung der Ergebnisse auf Enveloppen zweiparametrischer Flächenscharen.

Cohn-Vossen (Zürich).

**Vincensini, P.: Propagations d'aires invariantes. Correspondances par plans tangents parallèles entre surfaces réglées.** Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 25, 4, bis 68 (1933).

Verschiedene Spezialisierungen des Problems der flächentreuen Abbildung. 1. Gegeben eine Kurvenkongruenz  $K$ . Gesucht eine Flächenschar  $S$ , so daß die Kurven von  $S$  Bahnkurven einer flächentreuen Abbildung einer Fläche von  $S$  auf die anderen werden

— Dabei wird hauptsächlich der Spezialfall behandelt:  $K$  besteht aus den Graden durch einen Punkt oder den Graden, die eine Gerade senkrecht treffen. Es wird auch auf den Fall eingegangen, daß  $K$  aus coaxialen Schraubenlinien besteht. — 2. Gegeben eine Flächenschar  $F = t$ . Gesucht die Bahnkurven  $K$  einer flächentreuen Abbildung der Fläche  $t = 0$  auf die übrigen. 3. Spezielle Flächenscharen, die durch parallele Tangentialebenen flächentreu bezogen sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, Flächenscharen, bei denen die Gaußsche Krümmung (für die ganze Schar) nur vom sphärischen Bild abhängt. Die Differentialgleichung dieser Flächen, in der Form  $z = f(x, y)$  in rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  angesetzt, lautet:  $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = g(z_x, z_y)$ . — Dabei kann  $g$  irgendeine Funktion sein, die nur in der Schar fest bleiben muß. Verf. gibt nun speziell solche Scharen an mit Hilfe von Gradenkongruenzen mit abwickelbarer Mittenfläche (diese Kongruenz spielt aber nicht die Rolle der Kongruenz  $K$ ). Die Konstruktion führt bei Regelflächen, besonders bei Quadriken, zu anschaulichen Ergebnissen.

Cohn-Vossen (Zürich).

De Franchis, Michele: Una semplice dimostrazione del teorema fondamentale sulle trasformazioni conformi degli spazi lineari a più di due dimensioni. Rend. Circ. mat. Palermo 58, 55—56 (1934).

De Franchis, Michele: Ancora sulle trasformazioni conformi degli spazi lineari più di 2 dimensioni. Rend. Circ. mat. Palermo 58, 104 (1934).

Matsumura, Sôji: On a pair of surfaces mutually related. Tôhoku Math. J. 39, 7—21 (1934).

Einige, Ref. nicht ganz verständliche Formeln über Brenn- und Mittenfläche von Ribaucourschen Graden-Kongruenzen.

Cohn-Vossen (Zürich).

Matsumura, Sôji: Differential geometry of circle-system. Tôhoku Math. J. 39, 3—29 (1934).

En poursuivant son étude de la géométrie cerclée l'auteur étend sur les surfaces de  $\infty^2$  cercles le théorème de Tisserot sur l'existence d'un système orthogonal commun sur deux surfaces dont les points se correspondent biunivoquement. S. Finikoff.

Goreux, R. P. Frans: Étude des surfaces et des congruences de droites par la méthode cinématique. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A 54, 68—79 u. 97—131 (1934).

Eine Fläche  $\mathbf{R}(u, v)$  mit der Normalen  $\mathbf{N}(u, v)$  wird in bezug auf ein „mitbewegtes“ Dreieck  $\mathbf{N}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}$  beschrieben. Die Koordinaten  $l, \frac{m}{\sqrt{E}}, \frac{n}{\sqrt{G}}$  in bezug auf dieses Dreieck hängen mit den  $x, y, z$  von  $\mathbf{r}(x, y, z)$  folgendermaßen zusammen:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} = l, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \cdot \mathbf{r} = m, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \cdot \mathbf{r} = n.$$

für  $\mathbf{r}$  wird dann ein System von „Weingartenschen“ und „Gaußschen“ Formeln hergestellt, die zu Integrabilitätsbedingungen führen. Mittels der Koeffizienten dieser Formeln lassen sich dann die Formen wie  $(d\mathbf{r})^2, d\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r}$  ausdrücken. Im zweiten Teile wird diese Methode auf die Geradenkongruenzen angewandt. Hier werden hauptsächlich klassische Resultate (mit Anlehnung an Sannia) auf diesem Gebiete mittels der erwähnten Methode zusammengestellt, während der letzte Abschnitt dem Probleme der „Normalisation“ einer Kongruenz gewidmet wird. (Eine Kongruenz  $K$  „normalisieren“ heißt ihre Geraden einzeln parallel so zu verschieben, daß  $K$  zu einer Normalkongruenz wird.) Die dazugehörige Differentialgleichung wird samt den geometrischen Anwendungen gründlich untersucht.

Hlavatý (Praha).

Godeaux, Lucien: Sur la suite de Laplace de l'espace réglé associée à une surface. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3, 64—67 (1934).

Die asymptotischen Tangenten  $U, V$  einer Fläche werden in der bekannten linearen Abbildung als Punkte einer Hyperquadrik  $Q$  dargestellt. Sie gehören zu einer Laplaceschen Folge

$$\dots, U_n, \dots, U_1, U, V, V_1, \dots, V_n, \dots$$



deren jedes Glied das  $n$ -transformierte des vorangehenden ist. Diese Folge ist autopol in bezug auf  $Q$ . Dieser Tatbestand wird vom Verf. benutzt, um verschiedene Relationen zwischen den Gliedern der obengenannten Folge herzustellen. *Hlavatý (Praha).*

**Gambier, Bertrand:** Congruences de cercles; points focaux. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, III. s. 25, 69—114 (1933).

L'auteur examine minutieusement les congruences de cercles ayant 4 foyers à distance finie; il en distingue 13 espèces différentes selon 1° le nombre de foyers doubles, triples ou quadruples sur le cercle  $C$ , 2° le nombre de cercles infiniment voisins  $C_1$  qui coupent  $C$  aux foyers, 3° le nombre des points d'intersection de  $C$  et  $C_1$  confondus au foyer. Si les cercles de la congruence se repartissent en deux familles  $u$  et  $v$  de surfaces cerclées, les cercles voisins  $C$ ,  $C_1$  d'une surface se rencontrant en deux points, on peut la représenter par les équations  $\Sigma_1 = S(x - x_1)^2 - \varrho_1^2 = 0$ ,  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u} = 0$  aussi bien que par les équations  $\Sigma_2 = 0$ ,  $\frac{\partial \Sigma_2}{\partial v} = 0$ . Les centres  $(x_1)$ ,  $(x_2)$  des sphères  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  sont les foyers de l'axe de  $C$  qui correspondent aux développables  $u$ ,  $v$ . La transformation de Laplace suivie dans le sens ...  $(x_1)$ ,  $(x_2)$  ... donne naissance à une suite de sphères ...  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$  ...; deux sphères contigües déterminent le même cercle; deux cercles contigües se rencontrent à une paire de foyers. Si deux foyers  $f_1$ ,  $f_2$  se confondent,  $\Sigma_1$  dévient une sphère principale de la surface  $(f_3)$ ; le cercle  $C$  dévient osculateur à la ligne de courbure  $v$  de  $(f_3)$ . Deux paires de foyers  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ ,  $f_4$  confondus,  $C$  est osculateur à la ligne  $v$  de  $(f_3)$  et à la ligne  $u$  de  $(f_1)$ . La congruence des axes  $(x_1)$  est tout spéciale: ses deux transformées de Laplace sont normales. Il est impossible d'énumérer les nombreuses résultats géométriques du mémoire très intéressant.

*S. Finikoff (Moscou).*

**Vincensini, Paul:** Sur les points focaux des congruences de cercles. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, III. s. 25, 115—142 (1933).

Ce mémoire complète le précédent en examinant les congruences de cercles de 4 ou 6 points focaux sont rejetés à l'infini. L'auteur détermine en termes finis les congruences dont tous les foyers sont à l'infini et examine certains cas particuliers de congruences avec deux foyers à distance finie: ces deux foyers confondus, diamétralement opposés, un foyer fixe etc.

*S. Finikoff (Moscou).*

**Cartan, Élie:** Le calcul tensoriel en géométrie projective. *C. R. Acad. Sci., Paris* 198, 2033—2037 (1934).

Dans cette Note l'a. généralise en géométrie projective les procédés classiques du Calcul tensoriel de Ricci et Levi-Civita. Après avoir introduit les tenseurs dans un espace projectif, auxquels s'étendent sans difficulté l'addition, la multiplication générale et (dans certains cas) la contraction des indices, il définit la différentielle covariante (ou absolue) d'un tenseur. Les dérivées covariantes  $a_{\lambda|i}$  des composantes  $a_\lambda$  d'un tenseur, ne définissent pas en général un tenseur, mais les quantités  $a_{\lambda|i}$  jointes aux  $a_\lambda$  forment un tenseur prolongé du tenseur donné. — Tout ce qui précède se transpose sans modification dans les espaces à connexion projective, tels que l'a. les a définis il y a dix ans [cfr. É. Cartan, *Bull. Soc. Math. France* 52, 212 (1924)]. Dans le cas où il n'y a pas de torsion, l'a. donne les formules de Bianchi. Enfin il ajoute les conditions nécessaires et suffisantes pour l'applicabilité de deux espaces à connexion projective analytique. *Segre*

**Dantzig, D. van:** On the general projective differential geometry. III. Projective pointfield-algebra and -analysis. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 37, 150—160 (1934).

Ein bis auf einen Zahlenfaktor festgelegter Projektor in einem gewöhnlichen projektiven Raum  $P_n$  wird vom Verf. ein Projektorideal genannt und mit [...] angegeben. Die Ideale haben eine einfache geometrische Bedeutung. Es wird gezeigt, daß es möglich ist, mit Hilfe des Berührungspunktes  $x^k$  Projektoren vom Exzeß (= Grad + Valesdifferenz) Null durch Ideale in  $P_n$  darzustellen, d. h. geometrisch in  $P_n$  zu deuten.

Zum Beispiel ist jedem kovarianten Punkt  $w^\lambda$  eine zentrale Kollination mit  $[x^k]$  als invarianter Ort zugeordnet,  $w^\lambda$  bestimmt sowohl die Hyperfläche als das Doppelverhältnis der Kollination. Die Bestimmung von  $\varphi$  in der Umgebung des Ortes  $[x^k]$ , bis auf Infinitesimalen zweiter Ordnung, aus  $\varphi$  und  $\partial_\mu \varphi$  in  $[x^k]$  macht Verf. auf geometrische Weise mittels der zu  $\partial_\mu \varphi$  gehörigen Kollination.

*J. Haantjes.*

**Manarini, M.: Considerazioni sul calcolo vettoriale assoluto in una  $V_3$  e sui tensori doppi a divergenza unica.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 301—305 (1934).

Eine leichte Rechnung zeigt, daß n. u. h. Bedingung für  $V_\mu A^{[\mu\nu]} = 0$  in  $V_3$  ist

$$A^{[\alpha\beta]} \sqrt{g} = V_\gamma \varphi, \quad (g = \text{Det } g_{\lambda\mu})$$

wenn  $\alpha, \beta, \gamma$  die Symbole 1, 2, 3 in zyklischer Anordnung darstellen und  $\varphi$  eine beliebige Ortsfunktion ist. Der Verf. beweist diesen Satz in der italienischen Symbolik.

*Hlavatý (Praha).*

**Hoborski, A., et S. Golab: Contribution à la théorie des équations de Frenet dans l'espace riemannien à  $n$  dimensions.** Prace mat. fiz. 41, 101—104 (1934).

Wenn eine Kurve  $C$  in  $V_n$  alle Krümmungen — von der  $(1 + m)$ -ten angefangen — Null hat, so kann man  $n - m$  gegenseitig und zu dem Oskulations- $m$ -Vektor von  $C$  orthogonale Einheitsvektorfelder konstruieren, welche aus den parallel verschobenen Vektoren bestehen.

*Hlavatý (Praha).*

**Potron: Sur les espaces de Riemann admettant un groupe isométrique à  $n(n + 1)/2$  paramètres.** J. Math. pures appl., IX. s. 13, 197—216 (1934).

Ein  $n$ -dimensionaler Riemannscher Raum konstanter Krümmung gestattet bekanntlich eine  $n(n + 1)/2$ -gliedrige Gruppe von isometrischen Transformationen. Umgekehrt gilt, wie in der vorliegenden Arbeit bewiesen wird, der folgende Satz: Wenn die isometrischen Transformationen eines  $n$ -dimensionalen Riemannschen Raumes eine  $n(n + 1)/2$ -gliedrige Gruppe bilden, so ist dieselbe der euklidischen oder einer nicht-euklidischen Gruppe ähnlich.

*O. Borůvka (Brno).*

**Kawaguchi, Akitsugu: The foundation of the theory of displacements, III. Application to a manifold of matrices.** Proc. Imp. Acad. Jap. 10, 133—136 (1934).

In den zwei vorangehenden Arbeiten mit demselben Titel (vgl. dies. Zbl. 8, 34, 418) hat der Verf. die allgemeinsten Grundlagen der Übertragung begründet. In der vorgelegten Arbeit wendet er diese Resultate auf den Matrizenkalkül an. Dabei geht er von einer Matrixengleichung der Form

$$V_\mu A = \partial_\mu A + \Gamma_\mu A + A \Gamma_\mu^\nu$$

aus. Das ermöglicht ihm, verschiedene Theorien von einem einheitlichen Standpunkt aus zu betrachten. Für  $A \equiv e^\nu$ ,  $\Gamma_\mu^\nu = 0$  bekommt man z. B. die Theorie des vektoriellen  $n$ -Beines usw. Weitere Resultate werden angekündigt.

*Hlavatý (Praha).*

## Topologie:

● **Winter, Ferdinand: Das Spiel der 30 bunten Würfel. Mac Mahons Problem.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1934. 128 S. u. 31 Abb. RM. 3.60.

Beschreibung des Spielzeuges. Eine neue Gestaltung des Spielzeuges. Mac Mahons Problem. Problem der zwei Mac Mahon-Würfel. Kowalewskis Spiel mit sechzehn Steinen. Beziehungen zwischen Mac Mahon-Würfeln und Kowalewski-Würfeln. Das Auffinden der notwendigen Bausteine. Ein neues Spiel von drei Würfeln. Spiel der Würfel: oben und unten gleicher Farbe. Spiel der Würfel: oben und unten mit vier Farben. Spiel der Würfel mit vier Farben auf jeder Außenfläche. Würfel mit drei latenten Farben. Spiele mit zwölf und mit sechzehn Steinen. Spiele mit sechzig Steinen. Ein neues Spiel mit dreißig Quadraten. Ein neues Spiel mit magischen Würfeln.

*Inhaltsverzeichnis.*

**Jarník, Vojtěch, und Miloš Kössler: Sur les graphes minima, contenant  $n$  points donnés.** Čas. mat. fys. 63, 223—235 (1934) [Tschechisch].

Soient  $C_1, C_2, \dots, C_n$   $n$  points d'un espace euclidien. Considérons tous les ensembles connexes  $G$ , satisfaisant aux conditions suivantes: 1.  $G$  contient les points  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . 2.  $G$  est la somme d'un nombre fini de segments tels que deux quelconques entre eux n'aient qu'un point commun tout au plus. Soit  $l(G)$  la somme des longueurs



de ces segments. Dans cet article, on démontre l'existence d'un  $G_0$ , pour lequel  $l(G_0)$  atteint la valeur minimum; ensuite, on démontre quelques propriétés de l'ensemble  $G_0$  et on détermine  $G_0$  complètement dans le cas particulier où les points  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sont les sommets d'un polygone régulier ( $n \geq 13$ ).  
Autoreferat.

**Kuratowski, Casimir: Sur une généralisation de la notion d'homéomorphie.** Fundam. Math. **22**, 206—220 (1934).

Wenn  $X$  und  $Y$  zwei vollständige separable Räume und  $M$  und  $N$  zwei Punktmengen von  $X$  bzw.  $Y$  sind, so heißt eine eindeutige Abbildung  $f$  von  $X$  auf  $Y$  eine Homöomorphie der Klasse  $(\alpha, \beta)$ , falls  $f$  eine Bairesche Funktion der Klasse  $\alpha$  und  $f^{-1}$  eine Bairesche Funktion der Klasse  $\beta$  ist. Außer einigen Invarianz-, Existenz- und Erweiterungssätzen wird insbesondere gezeigt, daß zwischen je zwei gleichmächtigen separablen vollständigen Räumen eine Homöomorphie der Klasse  $(1, 1)$  existiert. Analoges gilt auch für Borelsche Mengen einer beliebig gegebenen Klasse. Des weiteren wird gezeigt, daß jeder in sich dichte vollständige separable Raum mit der Menge aller Irrationalzahlen  $(0, 1)$ -homöomorph ist. Die Punktmengen der Klasse  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , treten als  $(0, \alpha - 1)$ -homöomorphe Bilder vollständiger Räume auf (wenn  $\alpha$  eine Limeszahl ist, ist  $\alpha - 1 = \alpha$  zu setzen). Für  $\alpha > 1$  kann man sogar voraussetzen, daß die erwähnten vollständigen Räume nulldimensionale  $G_\delta$ -Mengen sind.

*P. Alexandroff (Moskau).*

**Sierpiński, W.: La propriété de Baire des ensembles et l'homéomorphie généralisée.** Fundam. Math. **22**, 262—266 (1934).

Es seien:  $\alpha$  eine beliebige Ordnungszahl höchstens zweiter Klasse,  $f$  eine  $(0, \alpha)$ -Homöomorphie im Sinne von Kuratowski (Fund. Math. **22**, 206—220, vgl. vorstehendes Ref.) von  $A$  auf  $A'$ . Falls  $A$  die sog. Bairesche Eigenschaft besitzt, so gilt dasselbe von  $A'$ . — Dagegen gibt es (wenigstens unter der Annahme der Kontinuum-Hypothese) eine lineare Punktmenge, die die erwähnte Eigenschaft besitzt und mittels einer  $(1, 0)$ -Homöomorphie in eine Menge übergeht, die die Bairesche Eigenschaft nicht besitzt.

*P. Alexandroff (Moskau).*

**Sierpiński, W.: Sur une extension de la notion de l'homéomorphie.** Fundam. Math. **22**, 270—275 (1934).

Verf. nennt zwei Mengen quasi-homöomorph, falls zwischen ihnen eine  $(\alpha, \beta)$ -Homöomorphie im Sinne von Kuratowski existiert. Verf. gibt neue Beweise für einige Sätze von Kuratowski, beweist die Invarianz der Lusinschen projektiven Mengen in bezug auf Quasi-Homöomorphie und zeigt, daß es eine lineare Punktmenge  $N$  gibt von der Eigenschaft, daß jede lineare Menge, welche mit  $N$  quasi-homöomorph ist, das Maß Null hat und auf jeder perfekten Punktmenge von der ersten Kategorie ist.

*P. Alexandroff (Moskau).*

**Kaufmann, Boris: Sur les surfaces fermées générales et la dimension locale.** C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1561—1563 (1934).

The author calls a closed set  $F$  a closed surface provided it is an irreducible cutting of the ordinary 3-space. He announces the theorem that if  $Z$  is an arbitrary closed cutting of  $F$ , then there exist in  $F$  arbitrarily small 2-dimensional cantorlike manifolds which intersect  $Z$ . Furthermore, at least one point of  $Z$  is the product of a monotone decreasing sequence of such multiplicities. Considering the dimension of a set as being defined integrally, the local dimension of a set at a point  $p$  is defined in terms of monotone decreasing sequences of cantorlike multiplicities; and the result is stated that the set of all "2-dimensional points" of a closed surface is at least of dimension 1. Some applications of the results to a study of the structure of closed sets are indicated.

*G. T. Whyburn (Baltimore).*

**Kurepa, Georges: Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés.** C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1563—1565 (1934).

Im ersten Teil der Note werden gewisse transfinite Mengensysteme definiert und zwei Sätze über dieselben ohne Beweis ausgesprochen. Es handelt sich dabei um

Systeme von Mengen  $G_{a_0 a_1 \dots a_\alpha}$ , wobei  $\alpha$  eine Ordnungszahl ist und im Falle, daß  $\alpha$  eine Limeszahl ist, vorausgesetzt wird, daß  $G_{a_0 \dots a_\alpha}$  Durchschnitt der  $G_{a_0 \dots a_\xi}$  mit  $\xi < \alpha$  ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß die vorkommenden Indizeskomplexe  $A = (a_0 \dots a_\alpha)$  usw. so beschaffen sind, daß von zwei Indizeskomplexen  $A$  und  $B$  entweder der eine, etwa  $A$ , ein Abschnitt des anderen ist, und dann  $G_A - G_B \neq 0$  (bis auf den Fall, daß  $G_A$  höchstens ein Element enthält), oder aber  $A$  und  $B$  zueinander fremd sind, und dann auch  $G_A \cdot G_B = 0$  ist. — Im zweiten Teil der Note wird der Begriff eines metrischen Raumes dahin verallgemeinert, daß als Entfernungen nicht notwendig Zahlen, sondern Elemente geordneter Mengen mit erstem Element auftreten. Als Zusatzbedingungen treten dabei Axiome auf, die den Entfernungsaxiomen der gewöhnlichen metrischen Räume nachgebildet sind. Es wird auch auf weitere Verallgemeinerungen hingewiesen. — Der Ref. ist nicht dazu gekommen, zu verstehen, in welchen Beziehungen der letzte Satz der Arbeit zu ihrem übrigen Inhalt steht.

*P. Alexandroff* (Moskau).

**Borsuk, Karol:** Sur la notion de la catégorie de MM. L. Lusternik et Schnirelmann. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1731—1732 (1934).

Der Begriff der Kategorie [Lusternik u. Schnirelmann, Mh. Math. Phys. 37, 125—130 u. 131—134 (1930), sowie C. R. Acad. Sci., Paris 188, 534—536 (1929)] wird ohne Änderung seiner Definition auf beliebige topologische Räume übertragen. Es werden Sätze (ohne Beweis) formuliert, die die Geltung der Grundeigenschaften der Kategorie (wie sie von Lusternik und Schnirelmann a. a. O. bewiesen wurden) für alle lokal-zusammenziehbaren kompakten Räume behaupten. Insbesondere hat die Kategorie einer beliebigen Punktmenge eines solchen Raumes in bezug auf diesen Raum immer einen endlichen Wert. Andererseits gibt es sogar reguläre Kurven (d. h. solche, die in allen Punkten eine Verzweigungsordnung  $< \aleph_0$  haben) von un abzählbar-unendlicher Kategorie, sowie solche, für die die Kategorie einen beliebigen Wert  $\leq \aleph_0$  annimmt. Es wird zum Schluß der Satz aufgestellt, daß ein lokalzusammenziehbares Kontinuum  $C$  mit einer Kategorie  $\leq 2$  dann und nur dann die Nullgruppe als Fundamentalgruppe besitzt, falls seine erste Bettische Zahl verschwindet. Hieraus folgt, daß die Poincarésche Mannigfaltigkeit  $M^3$  mit verschwindender Bettischer Zahl und von Null verschiedener Fundamentalgruppe eine Kategorie  $> 2$  hat, die Kategorie sich somit bestimmt nicht durch Homologieeigenschaften allein ausdrücken läßt.

*P. Alexandroff* (Moskau).

## Astronomie und Astrophysik.

● **Becker, Friedrich:** Grundriß der sphärischen und praktischen Astronomie. Mit Beitr. v. B. Sticker u. O. Wachtl. Berlin u. Bonn: Ferd. Dümmler 1934. 167 S. u. 59 Fig. RM. 4.80.

**Schmehl, H.:** Über die Zeitgleichung. Z. Vermessgswes. 63, 241—246 (1934).

Die Zeitgleichung wird in Mittelpunktsgleichung und die von der Schiefe herrührende Komponente zerlegt. Bei Beschränkung auf das erste Glied in jeder Komponente läßt sich der jährliche Ablauf der Zeitgleichung mit Hilfe von drei Kreisen konstruieren. Für Lehrzwecke hat der Verf. ein mechanisches Modell konstruiert.

*A. Klose* (Berlin).

**Milne, E. A.:** A method of analysing stellar variability. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 94, 418—430 (1934).

In ein rechtwinkliges Koordinatensystem werden als Abszissen die Logarithmen der Leuchtkraft  $L$ , als Ordinaten die des Sternradius  $r$  eingetragen. Man erhält dann bei rein periodischem Lichtwechsel ellipsenähnliche geschlossene Kurven, bei Lichtwechsel mit veränderlicher Amplitude Spiralen. An diesen Diagrammen lassen sich eine Reihe von Erscheinungen des Lichtwechsels veränderlicher Sterne in sehr allgemeiner Weise diskutieren. So werden Betrachtungen über die Energieverhältnisse



bei Veränderlichen, sowie über die Beziehungen zwischen Leuchtkraft und Geschwindigkeit gegeben. Ein Maß dafür, inwieweit sich  $L$  und  $dr/dt$  in Phase befinden, stellt die von der  $L$ ,  $r$ -Kurve eingeschlossene Flächeninhalt dar. Ferner wird die Lage des den Gleichgewichtszustand darstellenden Punktes im Diagramm erläutert. Dabei ergibt sich, daß ein Veränderlicher während einer Periode niemals den Gleichgewichtszustand passiert.

Klauder (Jena).

**Gramatzki, H. J.:** Zur Elektrodynamik des interstellaren Raumes. *Z. Astrophys.* 8, 87—95 (1934).

The author shows that a time dependence of the velocity of light, or of the dielectric constant of the medium, results in a difference between the emitted and observed frequency of light. The wave length is unaltered. He discusses how these results could be tested as possible explanations of the red-shift of the light from distant nebulae. He concludes that the rate of change of velocity of light required to give the observed red shift (in frequency) would be far below that which has been suggested by de Bray [*Nature* 127, 522 (1931)] from another standpoint.

W. H. McCrea.

**Strömberg, Gustaf:** The origin of the galactic rotation and of the connection between physical properties of the stars and their motions. *Astrophys. J.* 79, 460—474 (1934).

Die beobachtete enge Beziehung zwischen den die Bewegung der Sterne beschreibenden Daten (Mittelwert und Streuung der Geschwindigkeit für bestimmte Gruppen) und ihren physikalischen Eigenschaften (Masse, Leuchtkraft, Spektrum) wird aus der Entwicklung des Systems zu erklären versucht. Die Rotation der Milchstraße (und der Spiralnebel im allgemeinen) wird zurückgeführt auf die Gezeitenwirkung einer am dem chaotischen Urnebel nahe vorübergegangenen ähnlichen Masse; die Folgen einer solchen (sehr wahrscheinlichen) Begegnung werden näher diskutiert. Etwa vorhandene Kondensationen (Sterne) in der Nebelmasse würden, wie die Durchrechnung einiger Beispiele zeigt, nach dem Vorübergang stark exzentrische Bahnen um die zentrale Massenkonensation des eigenen oder des störenden Systems beschreiben; auf diese Weise könnten Objekte mit großer Masse und großer Geschwindigkeitsstreuung entstanden sein wie die langperiodischen und Haufen-Veränderlichen. Aus der zur Zeit der Begegnung noch nicht kondensierten Materie entwickeln sich unter dem Einfluß der Kontraktion infolge Ausstrahlung und der inneren Reibung in der dichteren zentralen Zone Sterne großer Masse mit hoher Gruppengeschwindigkeit, aber kleiner Geschwindigkeitsstreuung, während in den dünneren äußeren Gebieten die Bildung von kleineren Massen mit großer Streuung, aber kleinerem Mittelwert der Geschwindigkeiten zu erwarten ist. — Die Übertragung ähnlicher Entwicklungsvorstellungen auf den Einzelstern läßt die Bildung von Planetensystemen als normale, also sehr häufige Erscheinung folgern; eine mathematische Behandlung dieser Frage wird in Aussicht gestellt.

Wempe (Göttingen).

**Russell, Henry Norris:** Molecules in the sun and stars. *Astrophys. J.* 79, 317—342 (1934).

This paper gives a theoretical discussion of the abundance of molecular compounds in stellar atmospheres. It first presents a table of molecular and dissociation constants which are used in connection with Russell's own determinations of the abundance of the elements in the sun and the pressures prevailing above the spots and the disk, to calculate the amounts of several molecular compounds. For stars similar in composition to the sun (oxygen more abundant than carbon) the amounts of H, C, N, O, Ti are found and the observed behaviour of bands is adequately explained. In particular the maxima of CH and CN near class K are explained quantitatively, and are shown to arise from a displacement of the equilibrium at low temperatures towards the compound CO. The theoretically predicted maximum intensity of TiO is shown to be higher in giants than in dwarfs, in agreement with observation. The S stars are assumed to belong to the oxygen group and to contain more Zr than the normal stars of this type. — For stars with carbon in excess of oxygen it is shown that their properties

closely resemble those of R and N stars. Stars of intermediate composition should be likely to be classified as peculiar stars of classes M, R and N. In general it is shown that the prominence of hydrides arises from the abundance of hydrogen, giving in fact an independent proof of this abundance. It is shown that the moderate weakening of the bands of non-metallic compounds in passing from spot to disk is caused by dissociation only; the great weakening for metallic compounds however is due both to dissociation of compounds and to ionization of metallic atoms. Further, a process is suggested for the excitation of metallic emission lines in long period variables by the dissociation of compounds, and finally the relation of the present paper to the recent investigations by Cambresier and Rosenfeld and Rosenfeld is briefly discussed [see Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **93**, 710—723 (1933)]. The two sets of results are in good qualitative agreement.

*Steensholt* (Oslo).

**Rosenberg, R. L.:** A problem in kinetic theory arising out of a theory of the chromosphere. *Z. Astrophys.* **8**, 147—156 (1934).

In Univ. Obs. Oslo, Publ. **5** (1933) entwickelt Rosseland eine Theorie der Chromosphäre unter der Voraussetzung, daß das Gleichgewicht in einer Atmosphäre neutraler Atome aufrechterhalten wird durch einen nach oben gerichteten Strom positiver Ionen. Dabei soll der Widerstand, den diese zu überwinden haben, der Strömungsgeschwindigkeit  $u_0$  proportional sein. Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Prüfung der Zulässigkeit dieser Annahme. — Die Geschwindigkeiten sowohl der neutralen Atome wie auch der Ionen gehorchen einem Maxwell'schen Verteilungsgesetz. In das der ersteren gehen nur die Geschwindigkeitskomponenten der thermischen Bewegung, in das der Ionen außerdem noch  $u_0$  ein. Damit wird die Zahl der Zusammenstöße je eines Atoms mit einem Ion und die Impulsänderung pro Volumeneinheit in der Zeit  $dt$  berechnet. Aus diesem Ansatz ergibt sich nach mehrfacher Umformung und Integration die Gesamtkraft, d. h. der Widerstand der Ionen in Abhängigkeit von  $u_0$ . Von Bedeutung ist hierin der „effektive Querschnitt  $\sigma$ “, dessen Einfluß anschließend diskutiert wird. Als Endergebnis findet man, daß Rosselands Ansatz zulässig ist, wenn  $u_0$  kleiner ist als die durchschnittliche thermische Geschwindigkeit. Ist  $u_0$  sehr viel größer als diese, so wird der Widerstand konstant (vgl. auch dies. Zbl. **6**, 270 [Rosseland]). *Klauder*.

**Calamai, Gulio:** A method for calculating the elements of the motion of vapours in sunspots. *Mem. Soc. astron. Ital.*, N. s. **8**, 83—94 (1934).

A method is described for reducing the observed velocity in sunspots and obtaining therefrom the elements of the motion. The method is applied to five spots observed at the solar tower in Arcetri, from which some consequences emerge: the projections on the plane of the spots are logarithmic spirals, and the axes of the spots are probably inclined to the sun's surface.

*Autoreferat*.

**Kosirev, N. A.:** Radiative equilibrium of the extended photosphere. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **94**, 430—443 (1934).

Zur Deutung der anomalen Farbtemperaturen der frühen Spektralklassen angehörnden Sterne wird angenommen, daß diese von weit ausgedehnten Atmosphären umgeben sind, deren Krümmung nicht wie in der gewöhnlichen Atmosphärentheorie vernachlässigt werden kann. Verf. zeigt, daß dann in erster Näherung die Gleichung

$B = B_0(1 + \frac{3}{2}\tau)$  der gewöhnlichen Theorie durch  $B = \frac{2a}{R^2} + 3a \int_0^\tau \frac{d\tau}{r^2}$  zu ersetzen

ist ( $B$  schwarze Strahlung in der optischen Tiefe  $\tau$ ,  $R$  Radius für  $\tau = 0$ ,  $a$  eine Konstante). Zwischen  $r$  und  $\tau$  wird die Beziehung  $\frac{1}{r^2} \sim \tau^n$  angenommen und der Absorptionskoeffizient  $k \sim \varrho/T^4$  angesetzt. Damit ergibt sich  $n = 4$  und  $T = T_1 \tau^{1/4}$ . Für diese Temperaturverteilung wird anschließend die Energieverteilung im Spektrum in Abhängigkeit von Wellenlänge und Mittelpunkt Abstand bestimmt und für  $P$  Cygni Spektralklasse  $B$  1) und die Wolf-Rayet-Sterne numerisch ausgewertet. Die Ergeb-



nisse stimmen mit den Beobachtungen befriedigend überein. Den Schluß der Arbeiten bilden Abschätzungen der effektiven Temperatur, der Dichte in den äußeren Schichten und der Lebensdauer der untersuchten Sterne, sowie Betrachtungen über das Entstehen von Emissionslinien.

Klauder (Jena).

**Chandrasekhar, S.: The radiative equilibrium of extended stellar atmospheres** Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 94, 444—458 (1934).

This paper extends the standard results on radiative equilibrium to take account of the curvature of the surfaces of constant density. The general equation of transfer and of radiative equilibrium are written down, and suitable means of obtaining approximate solutions are discussed. The first is the analogy of the Schuster-Schwarzschild method for the case of zero curvature. A first approximation was given by McCrea [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 88, 729 (1928)] and is carried to a higher approximation by the author. The second method, due to Milne [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 81, 382 (1921)] and Eddington (Internal Constitution of the Stars, 322), is more accurate and capable of wider application. It seeks a solution of the transfer equation consistent with the flux integral. It yields first a value of  $B(r)$ , the black-body intensity appropriate to the temperature of the matter at distance  $r$  from the centre of the star. Thence, as shown by the author, the radiative intensity  $I(r, \theta)$ , at distance  $r$  making angle  $\theta$  with the radius vector, may be calculated. He shows how values are found for simple assumed laws of variation of density and absorption coefficient. He further studies the "Schuster Problem" of a scattering atmosphere surrounding a sphere radiating with given intensity, and shows that the emergent intensity depends not only on the optical thickness of the atmosphere but also on its spatial extent. The formation of absorption lines in a spherical atmosphere is discussed in detail. If the optical thickness  $\tau_\nu$  at frequency  $\nu$  is proportional to  $r^{-m}$  then

$$F'_\nu/F_\nu = 1/(1 + \eta),$$

where  $F'_\nu$  is radiation flux in the line,  $F_\nu$  in the flux just outside the line, and  $\eta = s_\nu/k_\nu$ , where  $s_\nu, k_\nu$  are the coefficients of line and continuous absorption. Lastly a short discussion is given of the radiative equilibrium of planetary nebulae. McCrea

**Chandrasekhar, S.: On the hypothesis of the radial ejection of high-speed atoms from the Wolf-Rayet stars and the novae.** Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 94, 522—538 (1934)

Zur Deutung der Spektren der Wolf-Rayet-Sterne und der Novae hat man die Hypothese aufgestellt, daß die für diese Sterne charakteristischen Emissionslinien von radial vom Stern ausgeschleuderten Atomen, die eine Nebelhülle bilden, herrühren. Verf. untersucht für zwei schematische Modelle die resultierenden Konturen der Emissionslinien. Für das Modell A ist die Anfangsgeschwindigkeit der ausgeschleuderten Atome verschwindend klein, es wirkt auf sie neben der vom Stern herrührenden Anziehung eine größere abstoßende Kraft, die nach dem Quadratgesetz abnimmt. Für das Modell B hat die Anfangsgeschwindigkeit einen gewissen (für alle Atome gleich großen) Wert, die wirkende Kraft ist allein die Anziehungskraft des Sterns. Für diese so spezifizierten Modelle können nun die Atomgeschwindigkeiten als Funktion des Abstands vom Sternzentrum unmittelbar berechnet werden, ferner auch die Dichteverteilung in der Nebelhülle, indem ein stationärer Zustand vorausgesetzt wird. Die Emissionslinienkonturen ergeben sich nun, indem die Volumenelemente der Nebelhülle nach der Dopplerverschiebung (die durch die Radialgeschwindigkeit relativ zum Beobachter gegeben ist) eingeteilt werden. Es wird die Emission über Volumina gleicher Dopplerverschiebung integriert, indem für die Ergiebigkeit eine Modellfunktion angenommen wird. Hierbei ist die Schattenwirkung des Sterns zu berücksichtigen, die charakteristische Unterschiede zwischen dem langwelligeren und dem kurzwelligeren Teil der Emissionslinien hervorruft. Verschiedene Unterfälle werden diskutiert. Gewisse der abgeleiteten Resultate sind von dem Ansatz für die Emissionsergiebigkeit unabhängig. Schließlich werden die Ergebnisse mit Rücksicht auf die Übereinstimmung

mit der Erfahrung untersucht. Verf. hält es für möglich, durch weitere Beobachtungen zu entscheiden, welches der beiden diskutierten Modelle der Wirklichkeit am nächsten kommt.

*B. Strömgren* (Kopenhagen).

**Wataghin, G.: Statistics of positrons and electrons in equilibrium with radiation at high temperatures.** Philos. Mag., VII. s. 17, 910—913 (1934).

Ein abgeschlossenes Gefäß, das mit elektromagnetischer Strahlung erfüllt ist, muß im Temperaturgleichgewicht bei hinreichend hohen Temperaturen auch Elektronen und Positronen in gleicher Anzahl enthalten; die diesbezüglichen Formeln werden angegeben, und es wird geschlossen, daß dieser Effekt vielleicht in heißen Sternen eine Rolle spielen könne.

*P. Jordan* (Rostock).

## Quantentheorie.

● **Haas, Arthur: Materiewellen und Quantenmechanik. Eine Einführung auf Grund der Theorien von de Broglie, Schrödinger, Heisenberg und Dirac.** 4. u. 5. verb. u. abermals wes. verm. Aufl. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1934. VIII, 299 S. u. 7 Abb. RM. 7.—.

**Bloch, F.: Die physikalische Bedeutung mehrerer Zeiten in der Quantenelektrodynamik.** Physik. Z. Sowjetunion 5, 301—315 (1934).

Die Wellenfunktion der Dirac-Fock-Podolskyschen Feldtheorie, welche als unabhängige Variable neben Koordinaten, Spin- und Feldgrößen noch eine Reihe von Zeitgrößen enthält, die den einzelnen Teilchen bzw. dem Feld zugeordnet sind, wird als Wahrscheinlichkeitsamplitude gedeutet. Hierbei sind alle in Frage kommenden Raum-Zeitpunkte der auch für die Widerspruchsfreiheit der erwähnten Theorie notwendigen Bedingung unterworfen, daß jede Möglichkeit einer Strahlungswechselwirkung der fraglichen Punkte ausgeschlossen sein soll.

*O. Klein* (Stockholm).

**Dirac, P. A. M.: Discussion of the infinite distribution of electrons in the theory of the positron.** Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 150—163 (1934).

Es wird die unendliche Ladungsverteilung untersucht, die in der Diracschen Theorie des positiven Elektrons durch die Annahme entsteht, daß fast alle Zustände negativer Energie besetzt sind. Um die Art des Unendlichwerdens dieser Verteilung zu studieren, benützt der Verf. die sog. Dichtematrix

$$R(x', t', \sigma'; x'', t'', \sigma'') = \sum_n \psi_n^*(x', t', \sigma') \cdot \psi_n(x'', t'', \sigma''),$$

wobei  $\psi_n(x', t', \sigma')$  die Eigenfunktion des  $n$ -ten Zustandes in Abhängigkeit von den Raumkoordinaten  $x'$  ( $x'$  steht für  $x, y, z$ ), von der Zeit  $t'$  und vom Spinindex  $\sigma'$  darstellt und die Summe über die besetzten Zustände  $n$  zu erstrecken ist. Die Dichtematrix hängt von den Raum-Zeit-Koordinaten zweier Weltpunkte ab und hat nur an den Stellen  $x' = x'', t' = t''$  physikalische Bedeutung, da sich aus diesen Werten die Dichte und der Strom ergibt. Bei Besetzung fast aller negativer Energiezustände besitzt die sonst reguläre Dichtematrix am Lichtkegel  $(x' - x'')^2 = c^2(t' - t'')^2$  Singularitäten, die an der Stelle  $x' = x'', t' = t''$  für den Grad des Unendlichwerdens der Ladungs- und Stromverteilung maßgebend sind. Verf. berechnet die Dichtematrix und ihre Singularitäten für den kräftefreien Fall und für das Vorhandensein von Potentialen. — Es besteht das Problem, von der auf diese Weise bestimmten Dichtematrix  $R$  jenen Teil abzutrennen, der physikalisch wirksam ist, da eine unendliche Ladungsdichte ja physikalisch sinnlos ist. Dies versucht der Verf. durch Subtraktion einer anderen Matrix  $R_0(x', t', \sigma'; x'', t'', \sigma'')$  zu erreichen, die dieselben Singularitäten hat, im kräftefreien Fall mit  $R$  übereinstimmt und bei Vorhandensein von Potentialen eine auch am Lichtkegel reguläre Differenz von  $R$  besitzt. Der Bestimmung dieser Funktion  $R_0$  haftet natürlich eine gewisse Willkür an, die durch die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung für die physikalisch wirksame Strom- und Ladungsdichte eingeschränkt ist.

*Weisskopf* (Zürich).



**Kar, K. C., and K. K. Mukherjee:** The wave-statistical theory of electron spin. *Philos. Mag.*, VII. s. 17, 993—1003 (1934).

Erörterung von Möglichkeiten, die Diracsche Wellengleichung des Drehelektrons zu ersetzen durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *P. Jordan* (Rostock).

**Temple, G.:** The quantum theory of the neutron. *Proc. Roy. Soc. London A* 145, 344—358 (1934).

Verf. ersetzt die Dirac-Gleichung durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die außer den Lösungen der ursprünglichen Gleichung noch eine Reihe weiterer quadratintegrierbarer Lösungen besitzt. Diese werden mit den Zuständen des Neutrons identifiziert. Das Neutron erhält dann den Massendefekt  $2mc^2$  und ganzzahligen Spin. Der Stoßquerschnitt dürfte von der Größenordnung des Bohrschen Atomradius werden. Die Übergangswahrscheinlichkeit vom Grundzustand des H-Atoms zum Neutron verschwindet; daß sie auch für die anderen Zustände (insbesondere in  $H_2$  und anderen Molekülen, die H enthalten) klein bleibt, ist nicht gezeigt.

*C. F. v. Weizsäcker* (Leipzig).

**Proca, A.:** Ondes et photons. II. Approximation de Pauli. *J. Physique Radium*, VII. s. 5, 121—125 (1934).

L'auteur introduit certains opérateurs contenant des dérivées d'ordre fractionnaire par rapport à  $x, y, z, t$ . Ces opérateurs, appliqués à un spineur (à deux composantes complexes) permettent de former un tenseur antisymétrique. Le tenseur est interprété comme bivecteur du champ électromagnétique d'un photon qui se trouve ainsi associé à un spineur. D'après l'auteur, un photon d'énergie positive (négative) représente une lumière polarisée circulairement dans un sens bien déterminé (le sens inverse). Le signe de l'énergie n'indique, d'après l'auteur, que le sens de polarisation — conclusion qui nous semble assez paradoxale (I. voir ce Zbl. 8, 327). *V. Fock* (Leningrad).

**Proca, A.:** Ondes et photons. III. Approximation de Dirac. *J. Physique Radium*, VII. s. 5, 157—166 (1934).

L'auteur reprend les raisonnements de l'article précédent avec l'équation de Dirac à deux spineurs. Il suppose ensuite qu'à chaque onde de lumière est attaché un neutrino et discute la question si les deux spineurs constituent la fonction d'onde du photon ou bien celle du neutrino associé.

*V. Fock* (Leningrad).

**Tamm, I.:** Zur Theorie der Elementarpartikel. *C. R. Acad. Sci. URSS* 2, 151—155 u. dtsch. Text 153—155 (1934) [Russisch].

Verf. bespricht zunächst kurz die von Pauli hervorgehobene Tatsache, daß man eine relativistisch invariante Wellengleichung aufstellen kann, die einem Elementarteilchen mit Ladung  $e$  und magnetischem Moment  $\mu$  entspricht und als Verallgemeinerung der Diracschen Wellengleichung aufgefaßt werden kann. Er äußert dann ferner die Vermutung, daß der Fall  $e \neq 0, \mu = 0$  dem Elektron, der Fall  $e = 0, \mu \neq 0$  dem Neutron, der Fall  $e \neq 0, \mu \neq 0$  dem Proton entspricht. Auf Schwierigkeiten, die sich hieraus bei der Deutung der Zusammenstöße zwischen den Elementarteilchen ergeben, wird hingewiesen.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

**Iwanenko, D.:** On the transmutation of hydrogen into neutron. *C. R. Acad. Sci. URSS* 2, 155—157 u. engl. Text 156—157 (1934) [Russisch].

Kurze qualitative Betrachtung über die Wirkungsquerschnitte der Elementarteilchen für Umwandlungsprozesse.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

**Gamow, G.:** Modern ideas on nuclear constitution. *Nature* 133, 744—747 (1934).

Zusammenfassende Darstellung der vorliegenden theoretischen Ansätze über den Kernbau. Die Stabilitätsbedingungen für  $\alpha$ - und  $\beta$ -Zerfall (nach Heisenberg, Bericht vom Solvay-Kongreß 1933, Brüssel, im Erscheinen) werden mit einiger Ausführlichkeit behandelt. Um die bei  $\beta$ -Strahlern sonst nicht vorkommenden langen Lebensdauern von K und Rb zu erklären, nimmt Verf. an, es handle sich hier entweder um gleichzeitige Emission von zwei Elektronen in einem Elementarakt oder aber die  $\beta$ -Strahlung rühre von unbekannten Isotopen von Cl bzw. Br her, die aus K bzw. Rb

durch einen  $\alpha$ -Zerfall sehr langer Lebensdauer und daher sehr kurzer Reichweite entstehen. Schließlich wird Fermis Theorie des  $\beta$ -Zerfalls [Z. Physik 88, 161 (1934); dies. Zbl. 9, 91] erwähnt und auf die Bedeutung der beim  $\beta$ -Zerfall gültigen Auswahlregeln für den Kerndrehimpuls hingewiesen. C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).

**Harkins, William D., and David M. Gans:** Atomic disintegration by „non-capture“. Nature 133, 794 (1934).

An Hand der Versuchsergebnisse von Feather [Proc. Roy. Soc. London A 136, 709 (1932)] wird gezeigt, daß Zertrümmerung von Stickstoffkernen durch Neutronen auch stattfinden kann, ohne daß das Neutron dabei eingefangen wird. S. Flüge.

**Ludwig, Guido:** Einfluß der Polarisierung des inneren Elektrons im Felde des äußeren auf die Terme des Spektrums eines Zwei-Elektronensystems (insbesondere He). Helv. physica Acta 7, 273—284 (1934).

Verf. untersucht die Energiewerte eines Atoms mit zwei Elektronen (He) für diejenigen Zustände, bei denen das eine Elektron sich auf einer äußeren Bahn befindet. Die Rydberg-Ritzschen Korrekturen werden berechnet und mit der Erfahrung verglichen. R. de L. Kronig (Groningen).

**Fermi, Enrico:** Sopra lo spostamento per pressione delle righe elevate delle serie spettrali. Nuovo Cimento, N. s. 11, 157—166 (1934).

Amaldi und Segré [Nuovo Cimento N. s. 11, 145 (1934)] haben beobachtet, daß die zu hohen Termen führenden Absorptionslinien von K und Na bei Fremdgas-zusatz von einer Atmosphäre bei relativ geringfügiger Verbreiterung beträchtliche Verschiebungen zeigen, die selbst die Größenordnung des Abstandes zweier aufeinanderfolgender Linien der Serie überschreiten können. Zur Aufklärung dieses Tatbestandes untersucht Verf. theoretisch die Verschiebung und Verbreiterung hoher Alkaliterme unter der Bedingung, daß innerhalb der Bohrschen Bahn des Leuchtelektrons sich bereits eine große Anzahl von Fremdgasatomen befindet. Zwei Einflüsse sind wesentlich: 1. Die innerhalb der Bohrschen Bahn befindlichen Fremdgasatome werden durch das Feld des Atomrumpfes polarisiert, wodurch eine Termerniedrigung (Rotverschiebung der Absorptionslinie) verursacht wird. Diese wird berechnet; sie ist proportional  $\alpha n^{4/3}$  ( $\alpha$  Polarisierbarkeit,  $n$  Dichte des Fremdgases). 2. Die Fremdgasatome wirken auf das Leuchtelektron wie Potentialmulden, deren Ausdehnung klein ist gegen seine de Brogliesche Wellenlänge. Dies kann sowohl zu Erhöhung als auch zu Erniedrigung des Terms führen. Die Größe — nicht aber das Vorzeichen — dieses der Dichte proportionalen Effekts kann aus dem Wirkungsquerschnitt der Fremdgasatome gegenüber langsamen Elektronen abgeschätzt werden. Es zeigt sich, daß dieser Effekt im allgemeinen wesentlichlicher ist als der Polarisierungseffekt. Schließlich wird auch die Verbreiterung der Terme berechnet und gezeigt, daß diese unter den Versuchsbedingungen von Amaldi und Segré so gering ist, daß noch sehr hohe Serienlinien getrennt beobachtet werden können, was mit dem Experiment im Einklang steht. Placzek.

**Blaton, J.:** Über die Intensitäten magnetischer Dipollinien. Z. Physik 89, 155 bis 165 (1934).

Es werden die Auswahlregeln und Intensitätsformeln magnetischer Dipollinien in den Atomspektren auf Grund der Wellenmechanik abgeleitet. Ein Spezialfall, der für astrophysikalische Anwendungen von Wichtigkeit ist, wird näher erörtert.

R. de L. Kronig (Groningen).

**Smith, Lloyd P.:** Quantum theory of the continuous X-ray spectrum. Pt. I. Rev. Modern Physics 6, 69—89 (1934).

In dem ersten Teil seines Referates beschränkt sich der Verf. auf die nicht-relativistische Theorie (ohne Retardierung) im Anschluß an die Arbeiten von A. Sommerfeld (vgl. dies. Zbl. 3, 142) und O. Scherzer (vgl. dies. Zbl. 4, 236). Behandelt sind die theoretischen Überlegungen, aus denen die wichtigsten Ergebnisse über Intensität und Polarisationszustand des Röntgenkontinuums entspringen; längere Rechnungen werden stets überschlagen und in einem mathematischen Anhang zusammen-



gestellt. Das Ziel des Referats „to suggest further experimental research“ dürfte erst durch den angekündigten 2. Teil erreicht werden, der den Vergleich der Ergebnisse mit der Erfahrung sowie die relativistische Theorie bringen soll. *S. Flügge.*

**Crawford, F. H.: Zeeman effect in diatomic molecular spectra.** *Rev. Modern Physics* 6, 90—117 (1934).

Zusammenfassender Bericht über den Zeemaneffekt in den Spektren zweiatomiger Moleküle. Zunächst werden die Ergebnisse der Theorie für die verschiedenen Kopplungsfälle zusammengestellt, hierauf wird ihre Anwendung auf eine Reihe von speziellen Spektren eingehend diskutiert. Schließlich wird der Zeemaneffekt von Bandenlinien, die in der Nähe von Störungen liegen, behandelt. *Placzek (Kopenhagen).*

**Kronig, R. de L.: Note on the determination of isotopic masses from band spectra.** *Physica* 1, 617—622 (1934).

Bei der Bestimmung von Isotopenmassen aus Bandenspektren nimmt man gewöhnlich an, daß die potentielle Energie der Schwingung für Isotope gleich sei. Aus der Theorie der Rotation und Schwingung zweiatomiger Moleküle folgt aber eine kleine Abhängigkeit von der Masse, deren Hauptglied sich leicht berechnen läßt. Damit wird eine Unstimmigkeit der Massenbestimmung des Deutrons aus den Banden des Aluminium-Deutrids beseitigt. *F. Hund (Leipzig).*

**Wilson jr., E. Bright: The normal modes and frequencies of vibration of the regular plane hexagon model of the benzene molecule.** *Physic. Rev.*, II. s. 45, 706—714 (1934).

Es werden die 30 Normalkoordinaten des Benzol-Modells angegeben; sie sind allein durch die Symmetrieeigenschaften des Modells bestimmt. Die zugehörigen Frequenzen werden dann durch die Koeffizienten in der Funktion der potentiellen Energie ausgedrückt. *F. Hund (Leipzig).*

**Winter, J.: Sur les indices de réfraction des ondes électroniques.** *C. R. Acad. Sci. Paris* 198, 1352—1354 (1934).

In Analogie zur wellenoptischen Erklärung der Lichtbrechung wird darauf hingewiesen, daß der Brechungsindex eines Metalls für Elektronen anstatt auf einer Potentialsprung an der Oberfläche des Metalls auf die Streuung der de Broglie-Wellen an den einzelnen Metallatomen zurückgeführt werden kann. *O. Klein (Stockholm).*

**Jones, H., and C. Zener: The theory of the change in resistance in a magnetic field.** *Proc. Roy. Soc. London A* 145, 268—277 (1934).

Es wird eine Formel für die Widerstandsänderung durch ein Magnetfeld für ein Metall mit beliebiger Eigenwertverteilung abgeleitet, unter der Annahme, daß eine einheitliche Relaxationszeit für alle Elektronen existiert. Eine Anwendung für Lithium (mit Annahme fast sphärischer Energieflächen, deren Abweichungen von denjenigen freier Elektronen durch einen Fourierkoeffizienten des periodischen Potentials bestimmt wird, das aus der Zusammensetzung von Atompotentialen gewonnen wurde) ergibt gute größenordnungsmäßige Übereinstimmung mit der Erfahrung. *Nordheim.*

**Niessen, K. F.: Bemerkung zu einem vermeinten Zusammenhang zwischen Austrittsarbeit und Elektronenpotential in einem Metall.** *Physica* 1, 623—626 (1934).

An einem einfachen Beispiel wird gezeigt, daß die Anwendung des Virialtheorems zur Berechnung der Austrittsarbeit bei Metallen bei Frenkel [*Z. Physik* 49, 39 (1928)] fehlerhaft ist. *Nordheim (Paris).*

## Klassische Theorie der Elektrizität.

**Tallqvist, Hj.: Einige elektrostatische Aufgaben, welche auf ein elliptisches Integral führen.** *Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math.* 7, Nr 8, 1—11 (1934).

Die behandelten elektrostatischen Aufgaben sind: 1. Eine leitende Kugel und eine die Kugel konzentrisch in der Äquatorebene umgebende geladene Kreislinie. 2. Diese Kreislinie in einer gegebenen Höhe über der Äquatorebene. 3. Die geladene Kreislinie innerhalb der Kugel. 4. Wieder die Kreislinie innerhalb der Kugel, aber in gegebenen

Höhe über der Äquatorebene. 5. Eine Unendliche Ebene und eine dazu parallele gedachte Kreislinie.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Banerjee, D. P.:** On the electrification of two non-parallel circular discs. Indian Phys.-Math. J. 5, 21—24 (1934).

Aufbauend auf einer Arbeit von J. Nicholson (Phil. Trans. Roy Soc. 224, 304) geht Verf. aus von den Transformationsformeln spheroideal Koordinaten auf einen neuen Mittelpunkt und neue Achsen. Die Laplacesche Potentialgleichung wird in bezug auf jedes der beiden Achsensysteme durch Produkte von Kugelfunktionen gelöst. Mit Hilfe der erwähnten Transformationsformeln wird die Lösung in bezug auf das System  $a$  in eine Reihe der erwähnten Produkte in bezug auf das System  $b$  entwickelt und umgekehrt. Einführung der Grenzbedingung ergibt dann die Koeffizienten. Hierfür werden schließlich Integraalausdrücke angegeben. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Heymann:** Über die Anwendung der Iterationsmethode zur angenäherten Berechnung der Wirbelströme und des Wirkwiderstandes. Arch. Elektrotechn. 28, 329—340 (1934).

Die Iterationsmethode (Neumannsche Methode) wird dazu verwendet, um, ausgehend von einer Gleichstromlösung der Maxwell'schen Gleichungen, das erste — in der Frequenz quadratische — Entwicklungsglied der quasistationären Näherungslösung (Stromverdrängung) zu finden. Anwendung auf einige technische, teils geschlossene, teils näherungsweise lösbare Aufgaben.

*Baerwald* (Wembley).

**Kohler, K.:** Anschlußnetze geringster Längen für ebene Punktgruppen. Ing.-Arch. 5, 105—109 (1934).

Die bekannte Lösung der Minimumsaufgabe, zwei „Verbraucherpunkte“ mit einem „Generatorpunkt“ unter kürzestem Leitungsaufwand zu verbinden, wird zu verallgemeinern gesucht für den Fall von  $n$  Verbraucherpunkten und verschiedenen Wertigkeiten der einzelnen Leitungsstrecken. Dies hat Bedeutung für die Planung von Überlandnetzen. Die angegebene Lösung besteht einfach in einer sukzessiven Anwendung derjenigen für zwei Punkte, die im Falle gleicher Wertigkeit auf eine elementare geometrische Konstruktion herauskommt. Doch liefert dieser schrittweise Prozeß nur die Lösung eines entsprechenden Extremalproblems (relative Minima), die eigentliche Minimumslösung wird nicht in geschlossener Form, sondern als nachträgliches Ausprobieren angegeben.

*Baerwald* (Wembley).

**Sartori, Giuseppe:** La media armonica e la resistenza elettrica equivalente di un gruppo di resistenze in parallelo. Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, N. s. 36, 48—53 (1932).

**Bernamont, J.:** Fluctuations de résistance dans un conducteur métallique de faible volume. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1755—1758 (1934).

Ein Versuch, die Widerstandsschwankungen elektronentheoretisch zu erklären, die in einem hohen Widerstand auftreten, der vor einem empfindlichen Verstärker liegt.

*Bechert* (Gießen).

**Pol, Balth. van der:** A theorem on electrical networks with an application to filters. Physica 1, 521—530 (1934).

Durch Anwendung einer Formel der Operatorenrechnung wird die Übergangsfunktion  $h^*(t)$  (indical admittance) zwischen Vorgängen in zwei Maschen eines Netzwerkes  $N^*$  als bestimmtes Integral über die entsprechende Übergangsfunktion  $h(t)$  des frequenzreziproken Netzwerkes  $N$  geschrieben. Bedeuten  $L$ ,  $R$  und  $D$  die Induktivitäts-, Widerstandsmatrix und Matrix der reziproken Netzkapazitäten von  $N$ , so ist  $L^* = \omega_0^{-2} D$ ,  $R^* = R$  und  $D^* = \omega_0^{-2} L$  (mit der Inversionsfrequenz  $\omega_0$ ). Die Integral-

darstellung lautet  $h^*(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \omega_0 \sqrt{\frac{t}{\tau}} I_1(2\omega_0 \sqrt{t\tau}) h(\tau) d\tau$  ( $I_1$  = Besselsche Funktion 1. Ordnung) und vereinfacht sich, falls  $h$  keinen Impulsanteil enthält, entsprechend. — Die



Anwendung auf Spulen- und Kondensatorleitung liefert für die Übergangsfunktion der letzteren eine neue Integraldarstellung. *Baerwald (Wembley).*

**Nagai, Kenzô: On retardation network.** Technol. Rep. Tôhoku Univ. Sendai 11, 113—159 (1934).

Als Verzögerungsnetzwerke werden symmetrische Vierpole mit konstanter, speziesverschwindender Dämpfung und linearem Phasengang, d. h. physikalisch: dispersionsfreie Netzwerke bezeichnet. Besteht das System aus endlich vielen konzentrierten Elementen, so kann die Linearität natürlich nur in einem bestimmten Frequenzbereich angenähert werden. Die Arbeit gibt eine Übersicht über die bekannten elementaren Reaktanzvierpoltypen in ihrer Eigenschaft als Verzögerer. Da Dispersionsfreiheit identisch mit der Reellität und Konstanz des Wellenwiderstandes ist, ist das frequenzreziproke Kreuzglied bzw. seine Äquivalenzen als ökonomischster Verzögerer, d. h. mit größtem Frequenzbereich für gegebene Elementzahl prädestiniert. Die numerische Berechnung dieses Typs wird bis zu 6 Elementen pro Glied durchgeführt. Als Interpolation wird einfach die Linearität für gleich weit entfernte Punkte des Frequenzintervalls streng erfüllt; durch Verwendung Tschebyscheffscher Interpolation, wie bei ähnlichen Aufgaben (Siebschaltungen), könnte man wohl weiter kommen. *Baerwald.*

**Matsumae, S., und A. Matsumoto: Doppelfilter.** Elektr. Nachr.-Techn. 11, 172—177 (1934).

Durch Reihen- und Parallelschalten von elementaren Filtervierpolen gleicher Dämpfungs-, aber verschiedener Wellenwiderstandsverläufe z. B. eines „reziproken  $T$ - mit dem entsprechenden  $II$ -Glied werden Filter gewonnen, die, in der Sprache der modernen Filtertheorie, die doppelte Wertigkeitssumme wie die Komponenten haben. Sie sind den höheren und kombinierten Zobel'schen  $m$ -derived Filtern nahe verwandt. Hier von einer „neuen“ Art von Filtern zu sprechen, wie es die Verff. tun, scheint dem Ref. irreführend zu sein, da dieselben selbstverständlich in der wohlbekannten Klassifikation der symmetrischen Reaktanzvierpole, und zwar in der Untergruppe der als Abzweigfilter realisierbaren enthalten sind; es ist ja bekannt, daß man, allgemein Reaktanzen als Elemente von Grundtypen:  $T$ -,  $II$ -, Kreuzglied usw. vorausgesetzt durch Operationen wie Reihen-, Parallel-, Kaskadenschaltung usw. prinzipiell zu keinen „neuen“ Filtern, d. h. solchen mit besserer Approximation der idealen Bedingungen bei vorgeschriebener Elementzahl gelangen kann. — Als schaltungsmäßige Realisierungen betrachtet, mögen die angegebenen Filter vielleicht gewisse Vorzüge haben, was aber erst durch Vergleich der mitgeteilten Frequenzcharakteristiken mit denen der schon bekannten analogen Typen, bei gleichem Aufwand, dargetan werden müßte. *Baerwald (Wembley).*

**Bruce, J. H.: Zur Theorie der Korona-Entladung.** Physik. Z. 35, 412—413 (1934).

Die Theorie der Korona-Entladung zwischen zwei unendlichlangen parallelen Elektroden beliebiger Form in einem Gas wird mit Hilfe des Greenschen Satzes auf das Problem der Lösung einer linearen Integralgleichung 2. Ordnung zurückgeführt, aus der sich die (als klein vorausgesetzte) Raumladung zwischen den Elektroden numerisch berechnen läßt. *Bechert (Gießen).*

## Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie

**Jacyna, W., S. Derewjankin, A. Obnorsky und T. Parfentjew: Bemerkung über die Beattie-Bridgeman'sche und die Tzu Chang Huang'sche Form der Zustandsgleichung.** Z. Physik 89, 370—372 (1934).

In den in der Überschrift genannten Zustandsgleichungen wird die Abweichung vom idealen Gas durch eine Größe von der Dimension eines Volumens („Aggregationvolumen“) beschrieben. Es wird auf die in der Literatur vorliegenden Zustandsgleichungen und ihren Zusammenhang mit den Arbeiten von Jacyna hingewiesen.

*Eisenschitz (Berlin).*



**Davydov, B.: Die Fokker-Plancksche Gleichung im Phasenraume und die Relaxationszeit der Maxwell-Verteilung.** C. R. Acad. Sci. URSS 2, 212—219 u. dtsch. Text 216—219 (1934) [Russisch].

In Verallgemeinerung eines Gedankenganges von Planck kann man für die Verteilungsfunktion  $w(x_\alpha, y_\alpha, t)$  der Koordinaten  $x_\alpha$  und der Impulse  $y_\alpha$  eines Systemes von Teilchen zur Zeit  $t$  eine Integralgleichung ableiten unter der Voraussetzung, daß die Teilchen selbst keine Wechselwirkung aufeinander ausüben. Nimmt man weiter an, daß die Impulsänderungen der Teilchen durch eine große Zahl voneinander unabhängiger Störungen (durch die Stöße der Moleküle) bewirkt werden, dann kann man in bekannter Weise aus der Integralgleichung eine Differentialgleichung gewinnen, die vom Typus der Fokker-Planckschen Gleichung ist. Hieraus lassen sich nun Abschätzungen für die „Relaxationszeit“ der Maxwell-Verteilung machen, d. h. jener Zeit, innerhalb derer sich aus einer beliebigen Anfangsverteilung die stationäre Maxwell-Verteilung einstellen wird. Es wird bemerkt, daß sich die Methode nicht auf die Wechselwirkung von Teilchen gleicher Masse anwenden läßt.

Fürth (Prag).

**Krutkow, G.: Zur Theorie der Brownschen Bewegung. Über die Verteilung der Geschwindigkeiten.** Physik. Z. Sowjetunion 5, 287—300 (1934).

Die Bewegungsgleichung für ein Brownsches Teilchen lautet

$$\dot{v} = -Pv + F, \quad (1)$$

worin  $v$  die Geschwindigkeit,  $1/P$  die Beweglichkeit pro Masseneinheit und  $F$  die durch die Stöße der Moleküle hervorgerufene „zufällige“ Kraft bedeutet. Die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion  $f(v, t)$  zur Zeit  $t$  genügt nach (1) der Integralgleichung

$$f(v, t + \tau) = f(v(1 + P\tau), t) (1 + P\tau) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(v', t) \psi(v - v', \tau) dv', \quad (2)$$

worin  $\psi(\eta, \tau) d\eta$  die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, daß die Geschwindigkeit des Teilchens in der Zeit  $\tau$  einen Zuwachs zwischen  $\eta$  und  $\eta + d\eta$  erhält. Sie läßt sich auf Einführung geeigneter Fourierscher Transformatoren auf eine Funktionalgleichung zurückführen. Für kleine  $\tau$  kann man hieraus durch Entwicklung nach Potenzen von  $\tau$  eine Differentialgleichung gewinnen, die eine Verallgemeinerung der bekannten Einstein-Fockerschen Gleichung darstellt und deren Lösung die gesuchte Verteilungsfunktion liefert. Eine besonders einfache Gestalt nimmt die Lösung für den Grenzfall sehr kleiner  $P$  an. Stellt man die Forderung auf, daß für  $t \rightarrow \infty$  die Geschwindigkeitsverteilung in die Maxwellsche übergehen muß, dann kann man die unbekannte Funktion  $\psi$  aus der Lösung eliminieren und erhält

$$f(v, t) = \sqrt{\frac{a}{\pi(1 - e^{-2Pt})}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{a}{1 - e^{-2Pt}} (v - \eta e^{-Pt})^2 \right] f(\eta, 0) d\eta, \quad (3)$$

worin  $f(\eta, 0)$  die Anfangsverteilung bedeutet. Eine weitere von Milne aufgestellte Integralgleichung für  $f(v, t)$  lautet

$$f(v, t + \tau) = (1 + P\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} f(v'(1 + P\tau), t) \psi(v - v', \tau) dv'. \quad (4)$$

Von ihr läßt sich zeigen, daß ihre Lösung für kleine  $\tau$  in die der Gleichung (2) übergeht. Schließlich wird noch eine Integralgleichung für die Übergangswahrscheinlichkeit aufgestellt und das mittlere Schwankungsquadrat der Geschwindigkeit berechnet.

Fürth (Prag).

**Trautz, Max: Die Reibung, Wärmeleitung und Diffusion in Gasmischungen. XXIV. Ermittlung des Unpaarreibung  $\eta_{12}$ ; Benützung, Bewährung und Deutungsverschiedenheiten des binären Mischreibungsgesetzes.** Ann. Physik, V. F. 18, 816—866 (1933).

This long and elaborate paper summarizes the results obtained at Heidelberg during ten years of experimental work on the viscosity  $\eta$  of gas mixtures, considered as a function of the relative concentration ( $x: y; x + y = 1$ ) of the constituent gases (1, 2), and of the tem-



perature  $T$  (mostly from  $20^\circ$  to  $25^\circ\text{C}$ ). It contains valuable tables giving the main characteristics of the  $\eta$ ,  $x$  curves at various temperatures, for no fewer than 34 gas-pairs; these characteristics include not only the more immediate results (such as  $\eta_{\max}$  and the corresponding  $x_{\max}$ , where such a maximum occurs), but also various constants obtained in representing the data by a formula for  $\eta$  consisting of the quotient of two quadratics homogeneous in  $x$  and  $y$ . A detailed account is given of the procedure found convenient for determining the coefficients in these quadratics, in the various cases that occur. The quadratic-quotient formula for  $\eta$  is discussed at length. Such a formula was first given by Maxwell (1868), and referred to gases whose molecules were force-centres  $\propto r^{-5}$ ; it is accurate for a gas sufficiently rare for non-binary encounters to be left out of account (the distribution law was not assumed to be unaltered during the non-uniform motion, as is stated on p. 817 of the present paper;  $\eta$  for Maxwell's special type of gas can be found without determining the modified distribution-law). Enskog and Chapman later (1911—1922) showed how  $\eta$  could be calculated for a binary gas-mixture whose molecules, while spherically symmetrical, interact according to any laws. They showed that, except in Maxwell's special case, the quadratic-quotient formula is only a first approximation, and that 2nd, 3rd . . . approximations represent  $\eta$  as the quotient of two homogeneous polynomials in  $x$  and  $y$ , each of degree 3, 4, . . .; the coefficients in these polynomials are calculable in terms of certain integrals involving, besides the molecular masses, the laws of force between the molecules in like (1,1 or 2,2) or unlike (1,2) encounters. If these laws of force were known,  $\eta$  is thus calculable to any desired degree of approximation, and an accuracy within 1% is in many cases obtainable without going to a 3rd approximation; thus the problem attempted by Maxwell, Enskog and Chapman, to infer  $\eta$  for spherically symmetrical molecules on any assigned types, is fully solved. In the case of simple gases, the law of force at encounter (in this case, like encounters) can to some extent be inferred by comparing the observed  $\eta$  (at various temperatures) with the corresponding simple-gas theory (or if the law of force is predicted by the quantum mechanics, the value of  $\eta$  can be found by inserting this law in the general formula for  $\eta$ ). In the case of a mixture, even if the 1,1 and 2,2 laws of force are known,  $\eta$  cannot be calculated without a knowledge of the 1,2 law of force; it is no part of the general theory to assume a relation between this and the two preceding laws (except in the case of rigid spherical molecules of diameter  $\sigma$ , for which naturally  $\sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ ). Knowledge of the 1,2 law can be gained from measures of the coefficients of diffusion ( $D_{12}$ ) and thermal diffusion ( $D_T$ ) at different temperatures; the results, inserted into the formula for  $\eta$ , would afford a check on the consistency of theory and observation, which has not yet been made in detail. The converse process, of determining the 1,2 law from  $\eta$  for a mixture, is scarcely practicable (even if the 1,1 and 2,2 laws were fully known), partly because of experimental errors, and partly because of the complexity of any approximation to  $\eta$  beyond the first. — Within the limits of present experimental error, a quadratic-quotient formula has amply sufficient adjustable constants to give a good fit with observation; naturally the constants can be identified only approximately with those in the first approximation of the general theory, even for spherically symmetrical molecules, and a fortiori for polyatomic molecules. In this paper the quadratic formula is taken as valid generally, and is written in the form

$$\eta = (\eta_1 q_1^2 x^2 + 2\eta_{12} q_{12} xy + \eta_2 q_2^2 y^2) / (q_1^2 x^2 + 2q_{12} xy + q_2^2 y^2);$$

the author has derived it from simple free-path considerations, treating the molecular encounters as if they were of three kinds, occurring between molecules 1 alone, or 2 alone, and mixed encounters, which are, however, conceived of as occurring between a third set of molecules, all alike and intermediate in character between the 1 and the 2 molecules. The factors  $q_1$ ,  $q_2$  are called collision-cross-sections for the two constituent gases, and  $q_{12}$ ,  $\eta_{12}$  are regarded as the collision-cross-section and viscosity of the ideal intermediate gas (independent of the ratio  $x:y$ ). Writing  $q = q_1/q_2$ ,  $q_{12}^2 = f q_1 q_2$ ,  $\eta_{12}^2 = F^2 \eta_1 \eta_2$ , it is clear that  $\eta$  depends on  $q$ ,  $f$  and  $F$ , which can be chosen to fit the  $\eta$ ,  $x$  relation for any given mixture. It is found that the formula for  $\eta$  is insensitive to change in  $f$  from  $\frac{1}{2}$  to 2, and that a good fit with observation is obtainable by suitable choice of  $q$  and  $F$ , taking  $f = 1$ . The experimental data show that  $F$  usually lies between 1 and 2, and depends little on  $T$ . As to  $q$ , it is found that, when derived for the three binary mixtures of three gases (1, 2, 3), the values accord well with the expected relation  $q_1/q_2 : q_3/q_2 = q_1/q_3$ , and this relation can be used to help to predict  $\eta$  for gas-mixtures. — The author's quadratic formula must be considered semi-empirical, based as it is on considerations of a kind which in other parts of the kinetic theory have proved misleading; but in the present instance the formula obtained, though inconsistent in some respects (as the author points out — cf. p. 824) with the theoretical first approximation, appears to have considerable practical value. The relations between the factors  $q$ ,  $f$ ,  $F$  and the molecular constants occurring in the Enskog-Chapman theory are set out in detail, and these constants are calculated from the experimental data, as also are values of  $D_{12}$ , which is, however, a function of  $x:y$  in general.

Chapman (London).

Donder, Th. de: L'affinité. III. Pt. VII. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20